RÉFLEXIONS ÉPISTÉMOLOGIQUES ET HISTORIQUES SUR LA GÉOMÉTRISATION DE LA PHYSIQUE ET LA NATURE DE L'ESPACE-TEMPS

LUCIANO BOI*

> « The tamed metaphysicist believes that the totality of all sensory experience can be comprehended on the basis of a conceptual system built on premises of great simplicity. The skeptic will say that this is a 'miracle creed.' Admittedly so, but it is a miracle creed which has been borne out to an amazing extent by the development of science. » (A. Einstein, 1950)

1. Remarques introductives

Dans ce travail, nous voudrions analyser certains aspects du développement mathématique et de la signification épistémologique du mouvement de géométrisation de la physique théorique depuis les travaux de T. Levi-Civita, d'E. Cartan et de H. Weyl jusqu'aux théories de jauge non abéliennes récentes. On se bornera ici à esquisser à grands traits quelques idées générales sur le sujet[1].

Le point de départ des considérations qui vont suivre est la réflexion actuelle sur les propriétés de l'espace (invariants topologiques et algébriques, groupes de symétries, brisures de symétries) dans le monde des phénomènes microscopiques, notamment quantiques. On cherche également à savoir quelle est la structure géométrique de l'univers et quelles sont les conditions physiques qui en ont permis la formation – c'est le problème de l'explosion initiale d'où notre univers serait issu et des singularités de l'espace-temps qui s'en sont suivies. Comme de remarquables recherches récentes sur la gravitation quantique et la théorie des supercordes l'ont montré, ces deux questions ont vraisemblablement la

---

* École des Hautes Études en Sciences Sociales, Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales, Paris, et Université du Québec à Montréal, Département de Philosophie. Il s'agit d'une version modifiée et élargie de la conférence donnée dans le séminaire *Pensée des Sciences* à l'École Normale Supérieure de la rue d'Ulm, en mai 1998. Je remercie Charles Alunni pour l'invitation, et tout spécialement Jean-Pierre Bourguignon d'avoir bien voulu relire et amender une version antérieure de ce travail.

[1] Pour les développements mathématiques et les détails historiques sur l'évolution des concepts les plus importants, nous renvoyons le lecteur à notre travail, "A trip through spacetime theory and the geometrization of theoretical physics: from B. Riemann to H. Weyl and beyond. Some historical and epistemological reflections", *Preprint*, Institute for Advanced Study, Princeton, April 1998.

même origine et elles se ramènent à la connaissance de la nature de l'espace et de l'espace-temps.

En effet, une nouvelle théorie développée ces dernières années, la théorie des cordes cosmiques[2], semblerait apte à expliquer le type de relation qui existe entre les lois physiques gouvernant les phénomènes à l'échelle quantique (ou de l' "infiniment petit", comme on le disait autrefois) et la physique des phénomènes cosmologiques (ou de "l'infiniment grand"). Si les idées acceptées à l'heure actuelle concernant l'unification des forces fondamentale et le *Big Bang* sont correctes, alors l'Univers aurait connu, dans la première fraction d'une seconde après sa naissance, une série de transitions de phases. De même que pour ce qui s'est passé dans le cas mieux connu des transitions de phases dans les systèmes de matière condensée, ces transitions quantiques pourraient être à l'origine de défauts topologiques d'un certain type comme, par exemple, les cordes ou les vortex, ou bien les monopoles, ou bien encore une combinaison de certains d'entre eux. Dans quelques cas, ces défauts sont stables pour des raisons relatives à la topologie de l'espace-temps, et certains d'entre eux ont par conséquent pu survivre jusqu'à nos jours. S'ils existaient réellement, il serait possible de mieux comprendre ce qui a pu se passer dans la première phase, hautement énergétique, de formation de notre univers. Les cordes cosmiques auraient des propriétés qui pourraient se révéler intéressantes en particulier pour expliquer d'autres éventuels types d'interactions ou les rapports entre la gravitation et les autres forces connues. Ce sont des objets très massifs, qui pourraient avoir eu un rôle important dans la formation de certaines structures de notre Univers comme les galaxies.

Tout ce qui précède semble graviter autour de la question suivante : est-ce que l'espace-temps est uniquement une structure géométrique formelle (un modèle mathématique) régissant, grâce à quelques principes généraux d'invariance, les forces et les interactions entre ces mêmes forces, ou bien, renferme-t-il en même temps un principe réel d'engendrement des phénomènes physiques, de sorte qu'il paraîtrait raisonnable de penser, dans ce cas, que la structure de l'espace-temps est sujette aux mêmes changements et fluctuations de ces phénomènes, dont elle est censée d'ailleurs déterminer les propriétés essentielles ? D'autre part, quel rapport existe-t-il entre les propriétés physiques des corps (et des objets), leurs qualités phénoménales et leur étendue dans l'espace ? D'une manière générale, on peut affirmer qu'une réponse à ces questions fondamentales et une explication des *apories fondatrices* qui en sont la base, telles que continu/discret, ponctuel/non ponctuel,

[2] Un excellent exposé de ce sujet se trouve dans M.B. Hindmarsh et T.W.B. Kibble, « Cosmic strings », *Reports on Progress in Physics*, vol. 58, n. 5 (1995), pp. 477-562.

local/global, déterminisme/indéterminisme, dépendent essentiellement de la possibilité de parvenir à une théorie géométrique satisfaisante, dont les concepts ne peuvent pas être tout à fait les mêmes que ceux qui ont servi de fondement aux deux progrès majeurs de la physique au début de ce siècle : la relativité générale (théorie de la gravitation) et la mécanique quantique (théories des champs quantiques).

En particulier, il apparaît nécessaire d'élaborer une géométrie conceptuellement plus riche que la géométrie riemannienne. Cela a été fait, en partie, dans les deux dernières décennies. Son plus grand intérêt réside dans ce qu'elle laisse entrevoir une possibilité de réconcilier la relativité générale avec la mécanique quantique. Elle joue un rôle fondamental notamment dans les théories de jauge non abéliennes et dans la théorie des supercordes. Cette géométrie riemannienne plus générale (ou post-riemannienne) s'appuie sur un certain nombre d'idées particulièrement intéressantes. Limitons-nous ici à mettre l'accent sur les deux suivantes.

(i) Il semble nécessaire d'admettre que l'espace-temps ait dix (ou onze, selon la théorie des supercordes la plus récente développée par Edward Witten et d’autres) dimensions au lieu de quatre. Cela est lié à certains requis mathématiques importants relatifs à la structure topologique de la variété concernée (une variété de Riemann compacte et à bord), auxquels la théorie doit satisfaire, mais également à des « faits » physiques essentiels qu’elle est censée d’ailleurs expliquer. Il se trouve en effet qu’aucune extension d’un groupe de symétrie interne – comme SU(5) – ne peut inclure les symétries de l’espace-temps (de la relativité générale), sauf à considérer l’ « espace interne » (de la mécanique quantique) comme des *dimensions supplémentaires* de l’espace-temps physique, et les phases comme des coordonnées, au même titre que la position et le temps. L’idée d’augmenter le nombre de dimensions de l’univers fut proposée dans les années vingt par les physiciens Th. Kaluza (1919) et O. Klein (1926) pour unifier gravitation et électromagnétisme. Cette tentative a été reprise récemment par la *Supergravité* dans le cadre d’un modèle mathématique et physique d’unification des forces beaucoup plus général. La théorie de la supergravité est fondée sur l’idée d’une supersymétrie locale : son groupe de symétrie englobe celui de la gravitation.

(ii) On fait l'hypothèse que la structure de l'espace-temps à l'échelle de Planck n'est pas celle d'une variété différentiable lisse C^∞, mais vraisemblablement l'équivalent d'un espace topologique (arbitraire) construit à partir d'une surface de Riemann complexe, ayant certaines caractéristiques et sur laquelle on définit un certain nombre de concepts mathématiques fondamentaux. Cette hypothèse laisserait penser qu'en particulier dans la théorie quantique des champs, les propriétés topologiques globales de la variété M

(lorentzienne ou riemannienne) jouent un rôle prépondérant et que, par conséquent, plusieurs effets (physiques) quantiques proviennent de la structure géométrique globale de M.

Il importe de voir que les tentatives faites pour trouver une solution aux problèmes évoqués plus haut, ont engendré un mouvement fécond de géométrisation qui affecte de plus en plus et de façon essentielle la physique théorique (en particulier les théories de jauge et les théories quantiques des champs), de même que certaines branches des mathématiques, notamment la géométrie et la topologie différentielles et la théorie qualitative des systèmes dynamiques. On remarquera d'ailleurs que ce mouvement, par le biais surtout d'une réflexion sur le problème de la forme (sur sa fonction et son statut), a touché récemment à plusieurs domaines des sciences naturelles et humaines, traditionnellement dominés par des méthodes de recherche empiriques et caractérisés par un faible niveau de modélisation théorique (mathématique). C'est le cas notamment de la biologie, de l'embryologie, de la physiologie, de la botanique et de la zoologie, mais également, de la psychologie, de la linguistique et même de l'art. Les conséquences épistémologiques d'un tel fait sont considérables, et l'on peut dire qu'elles sont en quelque sorte encore plus importantes que les résultats précis qu'il a été possible d'obtenir jusqu'à maintenant.[3] Cette idée de géométrisation, qui est déjà bien à l'œuvre dans les travaux de Riemann sur les concepts de variété abstraite (douée d'une métrique) et de « surface de Riemann », ainsi que dans ceux de Poincaré sur la topologie des variétés différentiables et la théorie géométrique (qualitative) des systèmes dynamiques, a pris de nos jours des formes inédites et revêt une signification et une portée beaucoup plus larges.

2. Origines de la géométrisation en mathématiques

Retraçons maintenant les grandes lignes de ce mouvement de géométrisation depuis ses origines. Il n'est évidemment pas question d'être exhaustif. Nés dans le cadre de l'élaboration d'une théorie analytique des fonctions d'une variable complexe et de la théorie des fonctions abéliennes, le concept de « surface à plusieurs feuillets » (*mehrblättige Fläche*) et celui corrélatif de « fonction multiforme » (*vieldeutig Funktion*) introduits par Riemann, ont contribué à enrichir d'un bon nombre de propriétés inconnues jusqu'alors l'étude des fonctions, ainsi qu'à établir toute une nouvelle classe de fonctions – en plus d'avoir

---

[3] Les raisons en sont multiples. Pour des remarques approfondies sur ce sujet, je me permets de renvoyer le lecteur à mon travail "Géométrie et Philosophie de la Nature : remarques sur l'espace, le continu et la forme", dans *Science et Philosophie de la Nature. Un nouveau dialogue*, L. Boi (éd.), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999, pp. 66-121.

fondamentalement changé l'idée même qu'on s'était faite jusqu'alors de l'objet *fonction.* Mais ils ont surtout permis de comprendre que lorsqu'on cherche à définir une certaine fonction complexe comme existant dans toute l'étendue d'une surface de Riemann – le plan complexe $\boldsymbol{C}$ ou la sphère de Riemann $\boldsymbol{S}^2$ – (au lieu d'exister simplement et séparément dans le plan), de nouvelles propriétés de ces fonctions apparaissent immédiatement. Dans celles-ci se reflètent les propriétés topologiques de la surface considérée en tant que fondement (ou substrat) de la fonction qui, elle, est conçue désormais comme un « domaine analytique » plutôt que comme une simple relation fonctionnelle entre deux ou plusieurs éléments qui varient d'une certaine manière. Il est dès lors impossible de séparer l'objet-fonction de l'objet-surface, puisque celui-ci fait partie intégrante de celui-là et que les deux ne sont, pour ainsi dire, qu'un même « être » mathématique. Ce qui, d'une manière générale, apparaît comme essentiel dans cette nouvelle approche de Riemann de la théorie analytique des fonctions complexes, est le rôle fondamental que joue la nature topologique de la surface (par exemple, son « ordre de connexion » et son « genre ») pour arriver à comprendre le comportement proprement analytique des fonctions qu'on y étudie.

Toute une nouvelle articulation de la théorie se trouve ainsi mise en place et un ensemble de notions géométriques (et topologiques) directrices sont forgées : « surface (de) revêtement universel », « surface de genre nul », « surface simplement connexe », «axiome de monodromie», « uniformisation », « application conforme », *etc.* Ces concepts ont permis de mettre en évidence de nouvelles structures (différentiable, algébrique, de groupe) à partir des surfaces de Riemann, et de rendre plus intelligibles les rapports qui lient cette théorie à d'autres domaines des mathématiques, en particulier, la théorie des intégrales de Dirichlet, la théorie des fonctions abéliennes, la géométrie algébrique (théorie des modules) et la théorie des groupes (discrets) de transformations. Toutes ces branches seront, dans les développements qui vont suivre, intimement intégrées à la théorie des surfaces de Riemann, comme les pièces inséparables d'une même mosaïque ou comme les anneaux d'un même tronc d'idées mathématiques. Felix Klein, Henri Poincaré, Luitzen Brouwer et Hermann Weyl ont pris une part fondamentale dans le développement de la théorie des surfaces de Riemann, dont les idées essentielles proviennent toutefois des travaux de Riemann lui-même. Tandis que Klein a fait des contributions importantes à l'étude des propriétés géométriques des surfaces de Riemann, l'apport de Brouwer et surtout de Weyl a consisté à élaborer une théorie « axiomatique » de la topologie de ces mêmes surfaces, véritable fondement de toutes les recherches qui ont suivi. Le rôle de Poincaré dans ce développement a été aussi important et, en un certain sens, plus important que celui de ceux dont nous venons de parler.

L'autre concept fondamental de la pensée mathématique de Riemann est celui de variété différentiable à *n* dimension, qui représente une généralisation de la notion de surface courbe munie d'une métrique intrinsèque (donnée par Gauss). L'idée géniale de Riemann a consisté à concevoir la variété comme d'un objet mathématique abstrait et indépendant de notre espace ambiant, pourvu d'une structure continue et différentiable. On entend par là que toute variété différentiable est un espace topologique séparé recouvert par une famille d'ensembles ouverts (U_i), chaque ouvert pouvant être défini comme une *carte locale* (ou *voisinage de coordonnées*) sur la variété, l'ensemble de ces cartes formant ce qu'on appelle communément un *atlas.* Pour chaque U_i, il existe un homéomorphisme dans un ensemble ouvert de l'espace euclidien à *n* dimensions $\boldsymbol{R}^n$; il existe également des applications différentiables de domaines dans $\boldsymbol{R}^n$. On dit que f est un difféomorphisme entre deux variétés si f et f^{-1} sont des homéomorphismes différentiables. Les voisinages de coordonnées forment la topologie de la variété, et tout ensemble ouvert de voisinage de coordonnées hérite de la topologie de ce dernier.

Il faut observer ici que ce qu'on a appelé la structure différentiable et topologique d'une variété à *n* dimensions, est resté un domaine mathématique pratiquement inexploré par Riemann, excepté pour quelques fragments de l'*Analysis situs*. C'est au contenu de ces fragments que se rapporte le mathématicien Enrico Betti dans un travail où il approfondit l'étude, déjà esquissée par Riemann, concernant plus particulièrement l'*ordre de connexion* d'une surface, et où il parvient à caractériser certaines propriétés topologiques intéressantes des variétés à *n* dimensions, entre autres, un nombre caractéristique (ou invariant topologique) qui a été nommé par Poincaré « nombre de Betti »[4]. La définition générale donnée par Poincaré dit que,

Définition : pour une variété à *n*-dimensions *V*, on peut définir le nombre de Betti à *q*-dimensions P_q, pour $1 \leq q \leq n - 1$, à la condition que $P_q - 1$ soit le nombre maximal des sous-variétés compactes, connexes et distinctes (sans frontière) contenues dans *V* et qui sont « linéairement indépendantes », c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'« homologie » entre ces sous-espaces avec des coefficients qui ne soient pas tous nuls[5].

[4] *Cf.* E. Betti, « Sopra gli spazi di un numero qualunque di dimensioni », *Annnali di Matematica pura ed applicata*, 2, IV (1871), pp. 140-158.

[5] *Cf.* H. Poincaré, « Analysis situs », *Journal de l'École Polytechnique*, t. 1 (1895), 1-121. Pour un exposé approfondi du contenu de ce mémoire de Poincaré, voir les deux références importantes suivantes : P.

Déjà de par ces brefs rappels, il apparaît clairement que Poincaré a continué l'œuvre de Riemann en développant certaines de ses parties, en montrant sa fécondité dans d'autres domaines des mathématiques, et surtout en ouvrant de nouveaux horizons aux idées que le mathématicien de Göttingen n'avait, dans certains cas, qu'esquissées. Deux exemples suffisent à le montrer. Premièrement, Poincaré a créé de toutes pièces la théorie topologique des variétés à n dimensions qui a permis de voir sous un jour nouveau certains problèmes jusqu'alors restés sans réponse, comme par exemple celui des propriétés des surfaces *fermées*, ou celui de savoir à quelles conditions deux surfaces, ou plus généralement deux variétés, peuvent être considérées *équivalentes* du point de vue de l'*Analysis situs*, ou enfin, le problème de la relation entre les propriétés topologiques d'une variété et les groupes discontinus de transformations qui agissent sur cette même variété. Même si Poincaré n'a pas résolu chacun de ces problèmes, les nouveaux concepts qu'il a forgés ont orienté les recherches postérieures sur le sujet. Ces concepts, sur lesquels la topologie moderne est fondée pour l'essentiel, sont notamment ceux d'« homéomorphisme », d'« homologie », de « nombre de Betti », de « groupe fondamental », etc. Deuxièmement, c'est à Poincaré que revient le mérite d'avoir compris le rapport qui existe entre les surfaces de Riemann simplement connexes et la théorie des groupes discontinus de transformations. Il a montré qu'à chacune de ces surfaces on peut faire correspondre plusieurs groupes discrets de mouvements et que leur géométrie demeure invariante sous l'action du groupe. Poincaré a en outre fait une contribution fondamentale au développement des théories des surfaces de Riemann et des fonctions d'une variable complexe, grâce à son théorème d'uniformisation[6] :

Théorème. Toute surface de Riemann simplement connexe est analytiquement isomorphe à l'un des trois espaces suivants : soit à la droite projective $\boldsymbol{P}^1$ (i.e. sphère de Riemann $\boldsymbol{S}^2$) ; soit au plan complexe $\boldsymbol{C}$; ou bien encore au disque-unité $D = \{z \quad \boldsymbol{C} / |z| < 1\}$[7].

Alexandroff et H. Hopf, *Topologie*, Bd. 1, Springer, Berlin, 1935, en particulier l'introduction et la II$^{\text{ème}}$ partie ; J. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology*, Birkhäuser, Boston, 1989, en particulier le chapitre 1.

[6] Poincaré a énoncé ce théorème dans l'article, « Sur l'uniformisation des fonctions analytiques », *Acta Mathematica*, 31 (1907), pp. 1-64.

[7] Pour une étude intéressante sur ce sujet et d'autres sujets connexes, *cf.* L. Bers, « Finite Dimensional Teichmüller Spaces and Generalizations », in *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*, Part 1, American Mathematical Society, vol. 39, F.E. Browder (ed.), 1983, pp. 115-156.

Il a de plus montré que tout voisinage infinitésimal d'une surface de Riemann est isométrique à un voisinage du plan hyperbolique complexe, et que la surface elle-même est le quotient $\boldsymbol{H}^2/G$ du plan hyperbolique (complexe) par un groupe discret de mouvements[8]. La structure conforme de cette surface induit une métrique de Riemann de courbure constante négative K (-1) – ou *métrique de Poincaré* – et son élément linéaire est donné par

$$ds = |dz|/y \ (U = \{z = x + iy\ ;\ y > 0\}).$$

D'une manière générale, le trait essentiel qui lie la pensée mathématique de Poincaré à celle de Riemann, est la tendance à un approfondissement de la géométrisation des mathématiques et d'autres sciences, notamment la mécanique et certaines parties de la physique. Cette géométrisation apparaît évidente et extrêmement féconde dans au moins quatre domaines occupant une place centrale dans l'œuvre de Poincaré : dans la théorie des équations différentielles (et dans les problèmes de mécanique céleste qui s'y rattachent directement) ; dans la théorie des fonctions automorphes (ou fuchsiennes) et des groupes discrets où, comme on le verra, la géométrie non euclidienne joue un rôle fondamental[9] ; dans la théorie des groupes continus de transformations (ou groupes de Lie) ; dans la topologie qui, dans l'esprit de Poincaré, doit permettre un élargissement considérable des méthodes et des problèmes qui ont traditionnellement appartenu à la géométrie. À ce propos, Poincaré écrit :

> La Géométrie à *n* dimensions a un objet réel ; personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperspace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier. (...) Il y a des relations de même nature entre les êtres de l'hyperspace ; il y a donc une *Analysis situs* à plus de trois dimensions, comme l'on montré Riemann et Betti. Cette science nous fera connaître ce genre de relations, bien que

[8] Voir à ce sujet W.P. Thurston, «Three Dimensional Manifolds, Kleinian Groups and Hyperbolic Geometry», *ibid.*, pp. 87-111.

[9] À vrai dire, le concept de groupe, et en particulier celui de groupe discontinu, joue un rôle déterminant dans tous les sujets mathématiques abordés par Poincaré, notamment dans l'*Analysis situs*. En fait, Poincaré a montré que le problème de savoir si les nombres de Betti suffisent pour déterminer une surface fermée au point de vue de l'*Analysis situs*, c'est-à-dire si, étant données deux surfaces fermées qui possèdent les mêmes nombres de Betti, on peut toujours passer de l'une à l'autre par déformation continue, dépend du fait que deux groupes de substitutions discontinus G et G' soient ou non isomorphes entre eux. Il écrit : « Le groupe G peut donc servir à définir la forme de la surface et s'appeler le groupe de la surface. Il est clair que si deux surfaces peuvent se transformer l'une dans l'autre par voie de déformation continue, leurs groupes sont isomorphes. La réciproque, quoique moins évidente, est encore vraie pour des surfaces fermées, de sorte que *ce qui définit une surface fermée au point de vue de* l'*Analysis situs*, *c'est son groupe*. Nous sommes donc conduits à nous poser la question suivante : deux surfaces fermées qui ont les mêmes nombres de Betti ont-elles toujours des groupes isomorphes ? » Le résultat qu'obtient Poincaré montre que les nombres de Betti peuvent être les mêmes pour deux surfaces, sans que leurs groupes soient isomorphes et, par conséquent, sans que l'on puisse passer de l'une à l'autre par déformation continue.

> cette connaissance ne puisse pas être intuitive, puisque nos sens nous font défaut. Elle va ainsi, dans certains cas, nous rendre quelques-uns des services que nous demandons d'ordinaire aux figures de Géométrie [1895, *op. cit.*, p. 4].[10]

À la différence de la géométrie ordinaire (métrique), la topologie s'occupe uniquement des propriétés qualitatives des constructions spatiales abstraites[11] (surfaces, espaces, variétés) dont les éléments sont sujets à des transformations continues, et non pas des rapports de mesure de ces mêmes constructions. Ces propriétés qualitatives sont tout à fait indépendantes de la métrique d'une figure géométrique quelconque, et elles ne se rapportent qu'à sa forme topologique ; autrement dit, de telles propriétés qualitatives sont invariantes par homéomorphisme. Bien que Poincaré ait été le créateur de la topologie combinatoire, et qu'il ait par la suite inspiré, du moins en partie, les développements de la topologie algébrique dans les années trente et quarante, il n'en est pas moins vrai que sa méthode a consisté à mettre en évidence d'abord et avant tout la nature et la signification géométrique des problèmes considérés.

3. Concept de connexion et géométrisation de la physique

C'est en particulier à Tullio Levi-Civita, Élie Cartan et Hermann Weyl que l'on doit d'avoir inauguré une nouvelle phase décisive dans les rapports entre géométrie et physique théorique. Dans quelques travaux fondamentaux parus entre les années vingt et trente, ces mathématiciens ont introduit un certain nombre de concepts nouveaux qui sont à l'origine des développements les plus décisifs, même parmi les plus récents sur le sujet. Il s'agit notamment des concepts de connexion projective, affine et conforme et d'espace fibré. En s'appuyant surtout sur des résultats obtenus par Élie Cartan, Charles Ehresmann élabore dans les années 1945-50 la théorie globale des connexions dans un espace fibré différentiable (voir plus loin).

La réalisation la plus importante dans la géométrie riemannienne depuis Riemann est la théorie du déplacement parallèle, que l'on doit à Levi-Civita, et qui est exposée dans un mémoire paru en 1917[12]. Le propos central de ce travail est le développement du concept de

---

[10] Pour d'autres considérations très intéressantes sur la nature et l'importance de l'*Analysis situs*, *cf.* H. Poincaré, « Pourquoi l'espace a trois dimensions ? », *Revue de Métaphysique et de Morale*, 20 (1912), pp. 407-429.

[11] *Cf.* les considérations intéressantes d'Alexandroff et Hopf dans l'ouvrage cité (p. 5).

[12] *Cf.* T. Levi-Civita, « Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana », *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. XLII, pp. 173-215.

parallélisme dans une variété à n dimensions douée d'une métrique quelconque. Ce concept permet, entre autres, une généralisation intrinsèque essentielle de la notion de courbure de Riemann, et une clarification des objets et structures géométriques (métrique en particulier) définis sur une variété. Il n'est pas question de faire ici une analyse approfondie du mémoire de Levi-Civita. Limitons-nous à en résumer la signification essentielle. Comme l'a souligné Élie Cartan (1930), l'introduction de la notion de parallélisme a permis une extension considérable de la notion d'espace. Grâce à sa définition du parallélisme, Levi-Civita conçoit des espaces à connexion euclidienne, considérés comme des collections de petits morceaux d'espaces euclidiens, orientés de proche en proche les uns par rapport aux autres. Partant du théorème d'après lequel tout ds^2 à n variables peut être réalisé sur une variété V_n convenablement choisie d'un espace euclidien pourvu d'un nombre suffisant de dimensions, il définit le parallélisme de deux tangentes à V_n en deux points infiniment voisins P et P' en posant pour condition que ces deux tangentes fassent le même angle avec toute direction tangente à V_n en P. Il démontre ensuite

(i) que l'angle de deux tangentes à V_n en P est égal à l'angle de deux tangentes parallèles en P', et

(ii) que le parallélisme de deux tangentes infiniment voisines se conserve par déformation de la variété (déformation laissant invariant le ds^2).

La première propriété fait de la variété V_n un espace à connexion euclidienne ; la seconde garantit que la connexion euclidienne, qu'on attribue à un espace de Riemann défini *in abstracto* par son ds^2, ne dépend pas de la réalisation particulière de ce ds^2 par telle ou telle variété de tel ou tel espace euclidien, mais qu'elle est intrinsèque.

Le concept de parallélisme de Levi-Civita permet de doter une variété (de Riemann) quelconque d'une certaine structure, qu'on appellera la connexion de la variété. Prenons le cas simple d'une surface dans l'espace euclidien. Considérons une surface S et un point p S. Une petite région de la surface entourant le point p correspond à une petite région du plan tangent en p par projection orthogonale ; issue d'un point p' infiniment voisin de p, une tangente donnée sera parallèle, au sens de Levi-Civita, à une tangente issue de p si la projection orthogonale de la première sur le plan tangent en p est parallèle à la seconde tangente. Or, cette projection orthogonale laisse inaltéré l'angle que font ces deux tangentes en p', du moins aux infiniment petits près du second ordre. Une telle projection orthogonale permet de rapporter deux axes de coordonnées rectangulaires, pris en p et tangents à la surface, à deux autres axes rectangulaires pris en p' et également tangents à la surface. En fait, c'est la notion de parallélisme, plus que le ds^2, qui nous donne le cosinus directeur (calculé par Levi-Civita) des seconds axes par rapport aux premiers. Ce qui permet de définir la connexion euclidienne entre le voisinage de *p* et celui de *p*'. La signification géométrique de cette connexion s'exprime par une rotation infinitésimale du plan tangent en *p*' autour de sa droite d'intersection avec le plan tangent en *p*, jusqu'à ce que les deux plans viennent à se confondre. Au lieu de deux points infiniment voisins, prenons deux point *a* et *b* quelconques; on pourra établir de proche en proche une connexion entre le voisinage de *b* et celui de *a*, à la condition de se donner sur la surface un chemin *acb* reliant *a* à *b*. Géométriquement, si l'on attache à chaque point du chemin un repère formé de deux tangentes rectangulaires à la surface, alors le chemin *acb*, avec tous les repères qui lui sont attachés, sera développé sur le plan tangent en *a*, suivant une ligne *acb*, et l'on connaîtra, par rapport au repère d'origine *a*, les coordonnées (euclidiennes) de l'origine et les cosinus directeurs des axes du repère attaché à *b*. Si l'on prenait sur la surface un autre chemin *adb* reliant le point *a* au point *b*, on obtiendrait un développement qui ne serait pas nécessairement équivalent au premier. On arrive ainsi à l'important résultat suivant : la connexion euclidienne entre deux points quelconques (et leurs voisinages) sur une variété n'a de signification intrinsèque que si ces deux points sont infiniment voisins. Pour le dire encore autrement : le déplacement parallèle de vecteurs et tenseurs dans une variété riemannienne n'est, en général, pas indépendant du chemin (il n'est pas intégrable).

Un an après la publication du mémoire de Levi-Civita, Weyl propose de généraliser la notion de déplacement parallèle à celle de connexion affine, dans le cadre de sa tentative d'élaborer une géométrie infinitésimale pure (*reine Infinitesimalgeometrie*). D'après lui, une telle géométrie devrait permettre une extension mathématique considérable de la géométrie riemannienne. Il développe cette nouvelle théorie dans deux travaux fondamentaux, parus en 1918. Sa construction s'articule sur trois niveaux : le continu amorphe au sens de l'*Analysis situs*, la variété à connexion affine, et l'espace métrique. Il importe de rappeler que Weyl conçoit le développement de cette théorie en liaison étroite avec la conception de l'espace physique : « Nous croyons que cette théorie est une géométrie véritable, une doctrine de l'espace lui-même, et non pas seulement, telle la géométrie d'Euclide et presque tout ce qu'on a coutume d'appeler géométrie, une théorie des formes possibles dans l'espace. [...] J'entends développer ici une pure géométrie infinitésimale qui, d'après ma propre conviction, englobe l'univers physique comme un cas particulier. »

Suivant Weyl, nous dirons que le point *P* d'une variété est en connexion affine avec son voisinage si l'on sait dans quel vecteur en *P*' un vecteur quelconque en *P* s'est transformé lorsqu'on l'a déplacé parallèlement à lui-même de *P* au point infinitésimal voisin *P*'. Une première condition que le transport parallèle doit satisfaire est la suivante : il existe un système de coordonnées pour le voisinage de P faisant en sorte que les composantes d'un vecteur quelconque de P ne soient pas altérées lorsque ce dernier subit un déplacement parallèle infinitésimal. Cette condition caractérise le transport parallèle comme étant une «propagation» qui réalise une représentation affine des vecteurs en P dans les vecteurs en P' et laisse les longueurs et les angles formés par ces vecteurs invariants. Le système de coordonnées associé à ce champ de vecteurs est dit géodésique en P. Considérons un système de coordonnées quelconques x_i. Soient x^i_0 les coordonnées de P dans ce système, $x^i_0 + dx_i$ celles de P', ξ^i les composantes d'un vecteur en P, $\xi^i + d\xi^i$ les composantes du même vecteur lorsqu'on l'a déplacé parallèlement à lui-même de P en P'. Comme le déplacement parallèle réalise une représentation affine ou linéaire de l'ensemble des vecteurs en P dans l'ensemble des vecteurs en P', il faut que les $d\xi^i$ puissent s'exprimer linéairement en les ξ^i par la formule :

$$d\xi^i = - d\gamma^i_r \, \xi^r.$$

Étant donné que les $d\gamma^i_r$ sont des formes linéaires des différentielles dx_i, on a :

$$d\gamma^i_r = \Gamma^i_{rs} \, dx_s \, ;$$

dans cette expression, les coefficients numériques Γ sont les composantes de la connexion affine, qui doivent satisfaire à la relation de symétrie :

$$\Gamma^i_{sr} = \Gamma^i_{rs}.$$

Les formules qui donnent les composantes de la connexion affine, lorsqu'on passe d'un système de coordonnées à un autre, s'obtiennent sans peine à partir des remarques précédentes. Précisons que les Γ ne sont pas les composantes d'un tenseur (contrevariant en i, covariant en r et s) en P ; elles possèdent bien ce caractère pour des transformations linéaires des coordonnées, mais elles le perdent pour des transformations quelconques. En effet, dans un système de coordonnées géodésiques, elles sont nulles. Cependant, chaque modification virtuelle de la connexion affine $[\Gamma^i_{rs}]$ peut être, elle, un tenseur, car

$$[d\xi^i] = [\Gamma^i_{rs}] \, \xi^r \, (dx)^s$$

est la différence des deux vecteurs qui résultent de deux transports parallèles du vecteur ξ de P en P'. Le déplacement parallèle d'un vecteur covariant ξ_i du point P au point P' se définit univoquement par la condition suivante : le déplacement simultané de ξ_i et d'un vecteur contrevariant η n'altère pas le produit invariant $\xi_i\eta^i$:

$$d(\xi_i\,\eta^i) = (d\xi_i\,.\,\eta^i) + (\xi_r\,d\eta^r) = (d\xi_i - d\gamma_i^r\,\xi_r)\,\eta^i = 0,$$

par suite,

$$d\xi_i = \sum_r d\gamma_i^r\;\xi_r\,.$$

Un champ de vecteurs contravariant ξ^i sera dit stationnaire en P si les vecteurs aux points voisins P' proviennent du vecteur en P par déplacement parallèle, c'est-à-dire si les équations aux différentielles totales :

$$d\xi^i + d\gamma^i_r\,\xi^r = 0 \qquad \left(\text{ou } \frac{\partial\xi^i}{\partial x_s} + \Gamma^i_{rs}\,\xi^r = 0\right)$$

sont satisfaites. Il existe évidemment un tel champ ayant en P des composantes données d'avance. La même notion peut être élargie aux champs covariants. On peut donc dire que les variétés affines sont celles jouissant de la propriété que tous leurs points sont en connexion affine avec leur voisinage. Dès lors, toute notion liée à la variété pourra être caractérisée de façon « naturelle » comme propriété appartenant à la connexion elle-même. Le concept de connexion est devenu ainsi le concept essentiel à partir duquel sont définis tous les autres, notamment ceux de parallélisme, de géodésique, de courbure, *etc.*

À la suite de Weyl, et en partie indépendamment de celui-ci, Élie Cartan a élaboré la théorie complète des connexions dans une série de travaux fondamentaux parus entre 1923 et 1925 (voir bibliographie), où il introduit en même temps les notions extrêmement importantes de variété à connexion affine et d'espaces fibrés. Quant à la première de ces notions, Cartan la décrit comme suit (1923) : considérons une variété abstraite à trois dimensions M^3, dont chaque point m est supposé défini par trois nombres u^1, u^2, u^3. Faisons correspondre abstraitement à chaque point m un espace affine contenant ce point, et soient $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ trois vecteurs formant avec m un système de référence pour cet espace. La variété sera dite à « connexion affine » lorsqu'on aura défini, d'une manière d'ailleurs arbitraire, une loi permettant de repérer l'un par rapport à l'autre les espaces affines attachés à deux points infiniment voisins quelconques *m* et *m*' de la variété ; cette loi permettra de dire que tel point de l'espace affine attaché au point *m*' correspond à tel point de l'espace affine attaché au point *m*, que tel vecteur du premier espace est parallèle ou équipollent à tel vecteur du second espace. En particulier, le point *m* lui-même sera repéré par rapport à l'espace affine du point *m*', et nous admettrons la loi de continuité d'après laquelle les coordonnées de *m*' par rapport au système de référence affine d'origine *m* sont infiniment petites ; cela permettra de dire, en un certain sens, que l'espace affine attaché à *m* est l'espace affine tangent à la variété donnée. D'après cela, si l'on attache à chaque point *m*, dans l'espace affine tangent, trois vecteurs de référence $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (pouvant même dépendre de paramètres arbitraires), la connexion affine de la variété s'exprimera par des formules ayant la forme (*):

$$(*)\qquad \begin{aligned} dm &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3 , \\ d\mathbf{e}_i &= \omega_i^1 \mathbf{e}_1 + \omega_i^2 \mathbf{e}^2 + \omega_i^3 \mathbf{e}_3. \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

dans lesquelles les ω^i et ω_i^j sont des formes linéaires par rapport aux différentielles des paramètres dont dépend le système de référence variable, les ω^i ne dépendant que des différentielles du^1, du^2, du^3. Elles signifient que tout point *m*' infiniment voisin de *m* sur la variété doit être regardé comme le point

$$m + \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3$$

de l'espace affine tangent en *m* ; de même le vecteur $\mathbf{e}_i$ attaché à *m* est équipollent au vecteur

$$\mathbf{e}_i + \omega_i^1 \mathbf{e}_1 + \omega_i^2 \mathbf{e}_2 + \omega_i^3 \mathbf{e}_3$$

de l'espace affine tangent en *m*. Naturellement, cette équipollence ne doit pas être considérée comme n'ayant un sens qu'aux infiniment petits du second ordre près. Aux formules (*), on peut adjoindre celles qui permettent de passer des coordonnées x^i d'un point de l'espace affine de *m* aux coordonnées $x^i + dx^i$ du point correspondant de l'espace affine de *m*'. On obtient alors les formules suivantes :

$$dx^i + \omega^i + x^1 \omega^i_1 + x^2 \omega^i_2 + x^3 \omega^i_3 = 0 (i = 1, 2, 3).$$

Quant au déplacement d'un vecteur, on a :

$$d\xi^i + \xi^1 \omega^i_1 + \xi^2 \omega^i_2 + \xi^3 \omega^i_3 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Les lois de connexion affine définissent en quelque sorte le raccord des espaces affines tangents en deux points infiniment voisins m et m'.

Cette théorie permet à Cartan d'obtenir des espaces beaucoup plus généraux, qu'il caractérise intrinsèquement, et non comme des sous-variétés définies dans un espace euclidien. Le résultat est une extension de la géométrie de Riemann à un espace avec connexion, qui peut être soit une connexion affine et de Weyl, soit une connexion conforme, ou encore une connexion projective. Dans ces généralisations, un rôle important est joué par la théorie du transport parallèle de Levi-Civita. L'importance du concept de connexion tient à ce qu'à partir de lui on peut caractériser toutes les propriétés géométriques de ces nouveaux espaces. En fait, relativement à certaines transformations compatibles de leurs coordonnées, deux espaces pourront être considérés équivalents si et seulement si leurs connexions sont équivalentes. On peut affirmer de façon générale qu'à partir de Weyl et Cartan, la notion de connexion devient le concept central de la géométrie différentielle avec celui de groupe et d'algèbre de Lie car, en fait, un espace à connexion de Cartan est une généralisation de la notion d'espace homogène de Lie, en désignant ainsi un espace G muni d'un groupe de transformations de Lie qui opère transitivement dans G.

Ce n'est cependant qu'avec Ehresmann, nous l'avons déjà mentionné, que se réalise le passage à une théorie globale des connexions, et cela grâce à l'introduction de la notion d'espace fibré. De la sorte, la notion de connexion de Cartan permet le développement des notions générales d'espace fibré différentiable et de connexion infinitésimale dans un espace fibré différentiable. Suivons Ehresmann. Étant données deux variétés différentiables B et F, on peut considérer les variétés différentiables $B \times F$ et $U \times F$, où U est un ensemble ouvert quelconque de B. Soit G le pseudogroupe de transformations formé par l'ensemble des automorphismes différentiables des produits $U \times F$, définis par $(x,y) \to (x,\varphi(x,y))$, où x U, y F, φ étant une application différentiable de $U \times F$ dans F telle que le rang de l'application s_x, définie par $y \to \varphi(x,y)$, soit partout égal à dim F.

Définition 1. Une structure fibrée différentiable sur l'ensemble E, de base B et de fibres isomorphes à F, est définie par une famille (f_i) d'applications biunivoques d'ensembles U_i sur $v_i \cap v_j \times F$ dans E satisfaisant aux conditions suivantes :

1. à tout couple d'indices (i,j) correspond ϕ_{ji} Γ tel que $f_i(x,y) = f_j(x',y')$ soit équivalent à $(x',y') = \phi_{ji}(x,y)$, c'est-à-dire $x' = x$, $y' = \varphi_{ji}(x,y)$. On suppose que f_i et f_j ne sont identiques que si $i = j$.
2. Les ensembles $f_i(U_i \times F)$ recouvrent E ; les ensembles U_i recouvrent B.
3. La famille (f_i) est complète, c'est-à-dire identique à toute famille qui la contient et qui vérifie 1. et 2. E, muni de cette structure, est appelé espace fibré différentiable et désigné par $E(B,F)$.

Soit $E(B,F)$ un espace fibré deux fois différentiable, la dimension de B étant n. Il existe sur E un champ transversal différentiable C de n éléments, c'est-à-dire un champ de n éléments supplémentaires aux éléments de contact tangents aux fibres.

Définition 2. Une connexion infinitésimale dans $E(B,F)$ est définie par un champ transversal différentiable C vérifiant la condition suivante : tout chemin différentiable a de B, d'origine x et d'extrémité x', est la projection d'une courbe intégrale a' du champ C, d'origine z F_x et d'extrémité z' $F_{x'}$, le point z étant arbitraire dans F_x.

Rappelons encore, brièvement, que l'autre contribution fondamentale de Cartan à la géométrie riemannienne a consisté dans la théorie des espaces symétriques, lesquels comprennent les espaces à courbure constante de Riemann comme un cas particulier. Un espace symétrique de Riemann peut être défini, soit comme celui pour lequel le parallélisme de Levi-Civita préserve la courbure sectionnelle (de Riemann), soit comme celui pour lequel la symétrie géodésique autour d'un point est une isométrie. Ce résultat établit une relation étroite entre les espaces symétriques de Riemann et les espaces localement homogènes. Un tel point de vue fait intervenir de façon essentielle la théorie des groupes de Lie, et en particulier le concept de groupe d'holonomie, déjà défini par E. Cartan (1928), mais qui le sera dans toute sa généralité par Ch. Ehresmann (1950).

Les nouvelles idées et méthodes introduites et élaborées par Levi-Civita, Weyl et Cartan (et d'autres) ont représenté le développement théorique le plus important dans la géométrie différentielle depuis Riemann. Elles ont permis non seulement l'accomplissement des conceptions géométriques proposées par ce dernier, mais encore le commencement d'une phase nouvelle dans la géométrie différentielle et dans les mathématiques en général. Ses caractéristiques essentielles nous semblent être les suivantes :

(*i*) l'incorporation de la théorie des groupes de Lie, accompagnée du développement d'un point de vue algébrique ;

(*ii*) la prédominance du point de vue global dans l'étude des objets et structures géométriques d'une variété ;

(*iii*) le développement du point de vue topologique, qui a donné lieu à la création de nouveaux espaces topologiques et à la définition du concept de variété différentiable. Naturellement, on doit considérer ces trois aspects comme étroitement liés.

4. Sur quelques aspects récents de la géométrisation en mathématiques

Ce mouvement de géométrisation présente aujourd'hui tous les caractères d'une pénétration de plus en plus profonde dans les mathématiques des idées nouvelles qui ont été développées tout au long de ce siècle en géométrie et topologie algébrique et différentielle, plutôt que ceux de la géométrie ordinaire et même des nouvelles géométries créées au XIXe siècle. En effet, toute une famille d'invariants géométriques et topologiques (nombre de Betti, nombre caractéristique d'Euler-Poincaré, classes caractéristiques de Whitney et Stiefel, formes caractéristiques de Pontrjagin et Chern) sont au cœur du développement des mathématiques de ce siècle, et ce sont ces mêmes concepts qui servent de fondement aux théories physiques récentes et notamment aux théories de jauge non abéliennes. L'introduction de ces concepts et le développement de tout un ensemble de nouvelles notions et techniques en géométrie et topologie algébrique et différentielle aux alentours des années 1940-50 (théories de l'homologie et de la cohomologie, de l'homotopie par Whitney, Lefschetz, Hopf, des espaces fibrés et des classes caractéristiques par Ehresmann, Steenrod, Thom, Chern et Milnor, marquent le passage de l'étude des propriétés locales des objets et des structures mathématiques à l'étude de leurs propriétés globales. Il n'y a aucun doute que l'introduction des concepts de *classes caractéristiques*, par Whitney et Stiefel en 1935, et des *formes caractéristiques*, « forme de Pontrjagin » ou « forme de Chern » suivant que le fibré sur lequel elles ont été définies est réel ou complexe, constitue un des progrès les plus décisifs des mathématiques en ce siècle. Intuitivement, ces «objets» sont des invariants géométriques et topologiques admettant une certaine classification dans différentes familles, encore qu'ils soient tous étroitement reliés entre eux. D'une manière générale, on peut dire qu'il est possible de transformer topologiquement une surface (ou une variété) dans une autre si elles possèdent les mêmes invariants caractéristiques. Les deux invariants mentionnés caractérisent globalement les objets mathématiques d'espace fibré et de connexion ; ceux-ci font intervenir notamment les concepts d'homologie et de cohomologie.

Deux exemples d'homologie et de cohomologie très importants de nos jours pour une plus grande compréhension de certaines questions fondamentales qui se sont posées en physique théorique, sont ceux de *bordisme* et de *cobordisme* de Thom, et d'homologie ordinaire H(X). En effet, plusieurs notions de la théorie classique des champs peuvent s'exprimer par les idées de la cohomologie. Les théories quantiques des champs plus récentes, reinterprétées dans le cadre mathématique des théories de jauge, montrent le rôle fondamental qu'ont les classes caractéristiques, qui ont été essentiellement introduites pour généraliser les idées cohomologiques. Un exemple extrêmement intéressant est celui d'un espace de cohomologie non abélienne des surfaces de Riemann à bord. Pour chaque espace topologique, on peut définir le groupe commutatif Ω(X)[13]. Dans la théorie, on travaille avec des applications continues f : Y __X des variétés Y orientées, compactes à bord dans X, on les appelle chaînes. On définit alors la somme et la différence par réunions disjointes et retournement d'orientation. Le bord de f est la restriction de f au bord de Y. On a ainsi que le bord d'un bord est vide : $\partial \circ \partial = 0$ (qui est la relation fondamentale de la topologie algébrique). Un cycle est une chaîne dont la source n'a pas de bord. Deux cycles sont dits équivalents si leur différence est un bord. Les classes de cycles forment le groupe Ω(X). L'anneau de Thom est le bordisme d'un point. Avec les produits Y __X, on voit que Ω(X) est un module sur Ω (donc Ω opère sur Ω(X)). À toute application continue X1 _ X2 est associée une application linéaire de Ω(X1) dans Ω(X2) ; nous avons alors un foncteur. La cohomologie du cobordisme Ω*(X) s'obtient en prenant les classes d'homotopie des applications continues de X dans un certain espace, en fait une suite emboîtée d'espaces topologiques : le spectre de Thom. La théorie de Ω* est plus riche que Ω ; c'est un anneau muni de toutes sortes d'opérations. Le cobordisme est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-variétés (disons N, N') de M. En une formule brève, cela veut dire que le cobordisme Z transforme N en N'. M désigne une variété compacte orientée et vérifiant H1(M) = 0. Nous dirons alors que deux sous-variétés N, N' sont cobordantes dans M s'il existe un compact Z _ M _ [0,1] tel que ∂Z = N _ {0} _ N' _ {1}.

---

[13] *Cf.* R. Thom, « Quelques propriétés globales des variétés différentiables », *Comment. Math. Helv.*, 28 (1954), pp. 17-86.

[14] Pour une excellente introduction à la théorie du cobordisme, *cf.* J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Princeton University Press, Princeton, 1965.

Ces brèves considérations suffisent à mettre en évidence certains caractères fondamentaux de l'homologie et de la cohomologie. Entre autres, sa signification intrinsèque pour la construction d'une théorie plus fine et plus riche du continu spatial et de la structure de l'espace-temps, ainsi que ses conséquences théoriques pour la physique et notamment pour la théorie quantique des champs. Indiquons quelques-uns de ces caractères[15] :

1) L'homologie peut être construite en quotientant une partie des données (couper puis recoller). Elle stabilise les formes.
2) Elle montre le rapport intime qui peut exister entre les figures et les nombres, surtout par le jeu des coefficients. Par exemple, rien n'empêche de considérer un nouvel anneau Ω à partir des combinaisons de chaînes à coefficients rationnels (**Q**) ou complexes (**C**). Cela permet de « localiser » et de « compléter ».
3) Mais la plus remarquable des propriétés serait l'universalité. Il existe une pléiade de cohomologies aboutissant aux mêmes résultats. Plus précisément : des définitions tout à fait différentes mènent à des théories isomorphes. Ce qui autorise les constructions axiomatiques. Toutes les cohomologies connues ne sont pas isomorphes, mais toutes sont reliées.
4) La cohomologie, elle, rend compte des formes ; en un certain sens, elle les définit. En tout cas, elle leurs assure une espèce de stabilité, de robustesse, de généricité.

Or, plusieurs notions de la théorie classique des champs peuvent s'exprimer grâce à la cohomologie. Les théories quantiques des champs plus récentes, réinterprétées dans le cadre mathématique commun des théories de jauge, montrent le rôle fondamental qu'y jouent les idées de cohomologie et de classes caractéristiques[16]. On fait également appel à ces concepts afin de parvenir, non seulement à élaborer une théorie mathématique consistante, mais aussi à une interprétation physique intelligible de certaines théories quantiques (de jauge) comme l'électrodynamique quantique de Dirac, Feynman et Schwinger.

[15] Ici, nous suivons de près D. Bennequin, « Questions de physique galoisienne », dans *Passion des formes. Dynamique qualitative, sémiophysique et intelligibilité*, en l'honneur de René Thom, ENS Éditions Fontenay St-Cloud, 1995, pp. 311-409.

[16] Des développements récents sur le sujet sont dus notamment à M.F. Atiyah, Yu I. Manin, E. Witten, K. Uhlenbeck et C.H. Taubes (pour les références précises, voir la bibliographie).

5. L'apparition des théories de jauge : une nouvelle étape fondamentale de la géométrisation de la physique

Revenons aux origines des théories de jauge pour en retracer brièvement les principales étapes[17]. Hermann Weyl a contribué de façon décisive au développement du mouvement de géométrisation de la physique. On lui doit deux réalisations majeures. En 1918, il donne les idées essentielles d'une géométrie plus générale que celle de Riemann, qu'il appelle géométrie conforme, et qui paraissait être le cadre mathématique le plus « naturel » permettant la construction d'une théorie unitaire des forces gravitationnelle et électromagnétique. Cette nouvelle géométrie infinitésimale renferme en fait la première formulation d'une théorie de jauge. Weyl a l'idée tout à fait nouvelle d'introduire un facteur scalaire non intégrable. Il montre alors que l'addition d'un gradient $d(\log\lambda)$ à la forme différentielle linéaire

$$d\varphi = \sum \varphi_\mu \, dx_\mu$$

ne change pas le contenu physique de la théorie, ce qui lui permet de conclure que l'expression

$$F_{\mu\upsilon} = \partial\varphi_\mu/\partial x_\upsilon - \partial\varphi_\upsilon/\partial x_\mu$$

est un invariant de jauge. Ainsi, Weyl identifie $F_{\mu\upsilon}$ au champ électromagnétique. De la sorte, l'électromagnétisme se trouve conceptuellement incorporé dans le cadre de cette théorie et, plus précisément, dans l'idée géométrique d'un facteur scalaire non intégrable.

L'autre réalisation fondamentale de Weyl, qui d'ailleurs a un rapport étroit avec sa théorie de jauge, concerne la mécanique quantique. Dans un article de 1927, « Quantenmechanik und Gruppentheorie », ainsi que dans l'ouvrage *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (1928), il se propose de développer les fondements mathématiques de cette théorie physique nouvellement découverte et, en particulier, de montrer les rapports étroits qu'elle doit avoir avec la théorie des groupes continus (groupes de Lie). Dans cette nouvelle approche

---

[17] Voir à ce sujet J.-P. Bourguignon and H.B Jr. Lawson, « Yang-Mills Theory: Its Physical Origins and Differential Geometric Aspects », in *Seminar on Differential Geometry*, Edited by S.-T. Yau, Ann. Math. Studies, Princeton University Press, 1982, pp. 395-421 ; J.-P. Bourguignon, « Transport parallèle et Connexions en Géométrie et en Physique », in *1830-1930: A Century of Geometry*, L. Boi *et al*. (Eds.), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1982, pp. 150-164.

proposée par Weyl, la question fondamentale à l'époque était de savoir comment l'explication des propriétés des particules pouvait être ramenée à l'étude du problème plus général des propriétés de symétrie des lois quantiques. Mathématiquement, cela revient à connaître la structure de certaines classes de groupes de Lie compacts ainsi que leurs algèbres. Du point de vue de la physique, il s'agissait notamment de savoir si de telles lois satisfaisaient aux symétries fondamentales connues à l'époque : droite/gauche, passé/futur, charge (électrique) positive/charge (électrique) négative. De façon indépendante, ces trois types de symétries furent introduites (sous une autre appellation) en physique quantique autour des années trente notamment par Weyl lui-même et par Eugene Wigner. Cependant, personne à l'époque n'avait pensé à faire le lien entre ces trois types de symétrie.

En s'appuyant sur une suggestion de Paul Dirac qui, en 1930, avait conjecturé l'existence d'une particule – vraisemblablement un proton – ayant une charge opposée à celle de l'électron, Weyl conclut que l'hypothèse du physicien britannique conduisait à admettre dans toutes les circonstances une équivalence essentielle entre l'électricité positive et l’électricité négative. Plus tard, en 1937, cette idée de Weyl sera reformulée dans le concept d'invariance conjuguée de la charge. Cependant, en 1957, on trouve que la symétrie gauche-droite [ou principe de conservation de la parité (désignée par la lettre *P*)], que les physiciens avaient toujours cru utile d'admettre, n'était pas tout à fait satisfaite par les lois de la nature. Elle se trouvait en particulier perturbée dans le cas des interactions faibles, c’est-à-dire de celles qui sont responsables des phénomènes radioactifs (la désintégration radioactive *bêta*). En effet, on put vérifier à la fois théoriquement et expérimentalement que cette théorie permettait de fait une description correcte du neutrino. Autrement dit, l'existence de la théorie de Weyl-Pauli (du neutrino) violait la symétrie gauche-droite. Cette asymétrie semblait être la conséquence d’un dédoublement : les particules sans masse (appelées *neutrinos*) émises dans la désintégration *bêta* n’existaient que sous une seule forme – la forme de gauche pour ainsi dire –, cependant que les antiparticules correspondantes (les antineutrinos) ne devaient, dans ce cas, exister que sous la forme opposée. Sur le plan mathématique, ce dédoublement pourrait, par exemple, se produire du fait qu’une équation posséderait deux solutions également valables. Certains physiciens théoriciens se sont appuyés sur ce phénomène pour formuler l’idée que le monde dans son ensemble n’avait pas besoin d’être symétrique vis-à-vis des opérations qui laisseraient invariantes les lois de la nature ; autrement dit, que la perte de symétrie pouvait éventuellement se ramener à l’asymétrie de l’univers tout entier.

6. Théories de jauge et rôle des symétries

Dans l'électrodynamique quantique, l'opération de symétrie consiste en un changement de la phase du champ de l'électron ; chacune de ces phases est dès lors accompagnée d'une interaction avec le champ électromagnétique. On peut ainsi imaginer un électron soumis à deux changements de phase consécutifs : l'émission d'un photon, puis son absorption. Il se trouve que si la séquence dans laquelle ont lieu les changements de phase est renversée, de telle sorte qu'un photon est d'abord absorbé puis émis, le résultat final sera le même. Il en résulte qu'une série infinie de changements de phases peut être effectuée et le résultat final sera simplement la somme algébrique de tous les changements indépendamment de l'ordre dans lequel la séquence a été effectuée. En revanche, dans la théorie de Yang-Mills, où l'opération de symétrie est une rotation locale de l'isospin, le résultat de transformations multiples peut être assez différent. Supposons un hadron qui est sujet à une transformation, B ; à la suite d'une série de transformations l'isospin aura une orientation qui correspond à un proton. Supposons maintenant que la même transformation soit appliquée toujours au même hadron, mais selon un ordre renversé : d'abord B suivie de A. En général, l'état final ne sera pas le même que le précédent : la nouvelle particule pourra être un neutrino au lieu d'un proton. Ce qui résulte des deux transformations dépend donc directement de l'ordre dans lequel elles ont été appliquées.

Si l'on cherche (comme on le fera plus tard) à obtenir une généralisation non linéaire des équations de Maxwell pour expliquer les particules élémentaires, plusieurs types de symétries sont requis :

(i) les *symétries externes* (*i.e.* les groupes de Lorentz, de Poincaré et le groupe conforme) pour le cas de la masse au repos nulle ;

(ii) les *symétries internes* (les groupes SU(2) ou SU(3)) pour certaines propriétés des particules élémentaires ;

(iii) la *covariance*, c'est-à-dire la possibilité de coupler certaines propriétés quantiques des particules élémentaires à la gravitation, en travaillant sur un espace courbe qui possède un certain type de structure topologique.

Cet important (et surprenant) résultat qui, mathématiquement, revient à admettre une certaine non commutativité des lois physiques, fut à l'origine d'un nouveau et très vaste programme de recherche en physique théorique concernant ce qu'on appelle les brisures de symétrie, et qui se poursuit encore aujourd'hui. Le point nodal de la question semble être à l'heure actuelle celui du rapport entre le phénomène de brisure de symétrie qui, à une certaine échelle de grandeur et de température, se produit dans le comportement de certaines particules élémentaires, et la structure géométrique de l'espace à cette même échelle. Plus précisément, on a avancé l'hypothèse qu'une brisure de symétrie intervient, mathématiquement parlant, lorsque se produit un changement dans la structure de l'espace considéré ou lorsqu'il y a un saut d'un groupe dans un autre plus « pauvre » du champ ou de l'interaction concerné(e). Cependant, rien n'empêche de penser que si l'on admettait l'existence d'un groupe plus riche (ou plus simple), comprenant les deux autres comme des sous-groupes, on pourrait alors espérer lever la difficulté.

L'autre remarque qui vient à l'esprit est simplement qu'au-delà des symétries connues en microphysique et révélant ce phénomène d'instabilité, il pourrait y avoir des symétries cachées et jouant un rôle encore plus fondamental dans la nature. Il n'est pas *a priori* assuré que ces symétries cachées soient les soi-disant « supersymétries » dont on parle beaucoup aujourd'hui, car il n'est pas moins raisonnable de penser que la configuration ou les configurations de particules et de leurs champs correspondants obéissent à peu près aux mêmes lois de symétrie que l'on connaît dans le cas des figures de la géométrie élémentaire plane ou de celui des polyèdres (réguliers) dans l'espace. Cela, enfin, suggère en quelque sorte l'idée que la symétrie ou l'asymétrie dont on parlait ne concerne pas tellement chaque particule ou des couples de particules, mais plutôt leur configuration dans l'espace. Or si je déforme celui-ci, $\phi : M \to dM$, de manière à le rendre moins régulier ou à détruire sa connexité originaire, ou que je complexifie ma variété, par exemple, en augmentant son genre, le groupe de symétries auquel obéissaient les points de l'espace (nous avons supposé, par commodité, qu'ils correspondaient à des particules) ne saura plus alors être le même.

On connaît l'importance qu'ont aujourd'hui les théorie de jauge en physique théorique. La nouvelle théorie de jauge élaborée par Yang et Mills en 1954 devait surtout servir de modèle pour l'étude des interactions fortes, et pour comprendre les effets quantiques sur ces mêmes interactions. La principale caractéristique de cette théorie de jauge est d'admettre comme groupe d'invariance un groupe de Lie non abélien, qui est le groupe non commutatif le plus simple. Cette propriété mathématique du groupe de symétrie confère à la théorie une structure très riche et donne lieu à des équations de champ plus générales que celles de Maxwell. Cela suffit déjà à montrer le rôle fondamental que jouent les symétries géométriques (en fait, toutes les symétries ne sont pas de nature géométrique) dans les problèmes physiques étudiés par les théories de jauge. Il convient de rappeler que déjà dans la théorie de Weyl on voit intervenir, en plus des variables de position dans l'espace-temps, un paramètre d'espace interne sur lequel le groupe de phase agit. Le champ qui s'identifie à la fonction d’ondes de la particule peut donc être vu comme associant à chaque point de l’espace-temps un point de l’espace de configuration interne, un angle dans le cas de l’électromagnétisme. Une jauge nécessite alors que l’on combine les coordonnées de l’espace-temps avec les paramètres de l’espace interne. La théorie de Weyl obéit à un principe d’« invariance locale », autrement dit, les équations de champ demeurent invariantes lorsque l’on passe d’une jauge à une autre.

Avec le développement des théories de jauge, il devient clair qu’il est possible de connaître la plupart des propriétés physiques des particules et de leurs interactions à partir de quelques symétries fondamentales. En effet, l’idée fondamentale qui est à la base des théories de jauge est celle de symétrie : on dit qu’un objet, ou une quantité, est symétrique si on peut lui faire subir une transformation sans changer sa structure. Par exemple, on peut faire subir une rotation de 60° à un flocon de neige sans modifier sa forme. On peut d’ailleurs le faire tourner d’un angle multiple de 60° ou lui faire subir plusieurs rotations successives avec le même résultat. Il est fréquent que plusieurs transformations différentes laissent ainsi un même objet invariant : l’ensemble de ces transformations possède une structure mathématique de groupe et forme le groupe de symétrie de l’objet. Ce sont surtout les groupes continus, tels que les groupes de Lie, qui apparaissent en théorie des champs. Les transformations appartenant à ces groupes dépendent d’un ou plusieurs paramètres variant continûment: c’est, par exemple, le cas du groupe des rotations dans un espace à trois dimensions, dont les paramètres sont les trois angles d’Euler. La structure mathématique des groupes continus est très riche, et ceux-ci jouent un grand rôle en physique, car à chaque groupe continu de symétrie correspond une loi de conservation d’une quantité physique (c’est le théorème de Noether). La conservation de l’énergie correspond ainsi à l’invariance de la théorie par rapport aux translations dans le temps, la conservation du moment cinétique à son invariance par rapport aux rotations. Les lois de conservation ont une importance fondamentale dans l’étude des systèmes physiques. On dit qu’une théorie présente une symétrie globale si elle est invariante (sous l’effet des transformations d’un groupe) à condition que la même transformation soit simultanément appliquée en tout point de l’espace. On dit par contre que la symétrie est locale si la transformation diffère de point en point. Comme on suppose généralement l’espace continu, il est naturel que les groupes continus jouissent d’une place prépondérante dans les théories dotées d’une symétrie locale. Contrairement à ce que l’on pourrait imaginer, l’exigence de symétrie locale est bien plus contraignante que celle de symétrie globale : celle-ci se suffit en quelque sorte à elle-même, alors qu’une symétrie locale ne survit que si l’on ajoute un élément à la théorie. Cette adjonction est un champ et c'est d'ailleurs la motivation essentielle pour imposer à une théorie une contrainte de symétrie locale.

On remarquera ici qu'il existe plusieurs théories de jauge, puisque toute théorie physique fondamentale peut être en fait caractérisée comme une théorie de jauge ; ce qui distingue l'une de l'autre est essentiellement la nature et le nombre des symétries vis-à-vis desquelles les lois de chacune d'entre elles demeurent invariantes. C'est là un point tout à fait capital. Les symétries sont au cœur de la structure mathématique des théories, mais en même temps elles jouent aussi un rôle fondamental en vue de déterminer le contenu physique de ces mêmes théories. Mais, puisque ces symétries peuvent être soit de nature locale, soit de nature globale, il est apparu de plus en plus clairement que pour mieux en connaître la nature intrinsèque, il fallait avoir une idée suffisamment claire des propriétés topologiques aussi bien globales que locales de l'espace ou de la variété dans laquelle on suppose que les particules et les champs existent. En d'autres termes, la structure topologique de l'espace permet non seulement de détecter l'existence de nouvelles symétries en plus de celles qui sont reconnues, mais également la présence de nouveaux champs physiques. Par ailleurs, nous l'avons vu, la symétrie locale de certaines théories physiques peut être restaurée uniquement par adjonction d'un nouveau champ à la théorie : l'électrodynamique quantique résulte de la combinaison du champ matériel d'électrons avec le champ électromagnétique[18] ; alors que, dans la relativité générale, ce champ est bien sûr celui de la gravitation. La théorie électromagnétique de Maxwell et la relativité générale d'Einstein sont toutes les deux fondées sur une symétrie de jauge locale. Dans cette dernière, la symétrie en question n'est pas associée à un champ qui se propage à travers l'espace, mais à la structure de l'espace-temps lui-même, c'est-à-dire à sa géométrie. (On pourrait ajouter ici que la théorie de la relativité générale repose sur l'observation fondamentale que la structure de l'espace-temps est intrinsèquement courbe, c'est-à-dire que le système de coordonnées qui y est défini doit être nécessairement curviligne.) À la différence des deux théories mentionnées, la première

[18] Il n'est pas question ici de rappeler les problèmes à la fois mathématiques et physiques très fâcheux que pose cette théorie. La définition même d'événement n'est pas donnée, comme dans le cas des autres théories physiques connues, de manière univoque mais par une procédure de type probabiliste. D'ailleurs tous les calculs que l'on fait pour déterminer le nombre d'interactions qui ont lieu entre les différentes particules, donnent toujours une quantité infinie. L'« infinitude » qui caractérise l'électrodynamique quantique a mené à penser qu'il ne pouvait pas exister d'interprétation raisonnable des quantités physiques appartenant à la théorie. En fait, on se trouvait devoir assigner une probabilité infinie à chaque interaction entre les électrons et les photons. Même dans le cas d'un électron isolé, on était en face de valeurs infinies, car l'électron peut émettre et réabsorber des particules virtuelles s'il a une masse et une charge infinies. C'est de ces faits que sont nées (autour des années 60) les premières tentatives pour élaborer une méthode qu'on a appelée «normalisation» et dont le propos principal était précisément d'éliminer toutes ces quantités infinies et divergentes.

théorie de jauge pour les interactions fortes, proposée en 1954 par Yang et Mills, était caractérisée par la donnée d'une symétrie globale. Or, le problème se posait naturellement de savoir quelles pouvaient être les conséquences quand on convertissait la symétrie globale en symétrie locale. Il s'avère que, comme dans d'autres cas, l'invariance locale se conserve seulement si « quelque chose d'autre » est ajouté à la théorie. Quand on assujettit l'isospin à des rotations qui ont lieu arbitrairement d'un lieu à un autre (qui ne concernent donc pas l'espace tout entier), les lois de la physique demeurent invariantes seulement si neuf nouveaux champs sont introduits.

D'après ce qui précède, il nous paraît fort raisonnable de penser que le phénomène de conversion d'une symétrie globale en une symétrie locale peut nécessiter une « compactification » de l'espace dans lequel on fait agir le groupe de symétries : cela revient à savoir, comme dans le cas de la théorie des supercordes, comment passer des dix dimensions qui semblent être exigées pour que la théorie soit mathématiquement cohérente aux quatre dimensions de l'espace-temps. La réponse ne peut venir que de la construction d'une théorie unifiant particules et forces, la supercorde. Mais le contraire pourrait aussi se produire. C'est le cas lorsque une symétrie locale se transmet à l'espace tout entier. Il faut, pour cela, s'imaginer des espaces symétriques d'Élie Cartan où la symétrie locale autour d'un point est la même que la symétrie dans chaque point de l'espace ; on peut alors parfaitement définir le quotient M/G, où M est une variété abstraite, compacte, orientée et suffisamment lisse et G un groupe de Lie fini et compact d'automorphismes agissant de façon transitive sur M.

6.1. Brève digression philosophique sur le concept de symétrie

À ce propos, faisons une brève digression plus philosophique. À peu de choses près, un phénomène analogue à celui qu'on vient de décrire se retrouve chez les organismes vivants, par exemple, dans le corps humain. Dans ce cas, cependant, le passage d'une situation locale à une situation globale ressemble plus à une propagation d'un noyau de structure localisée dans une partie bien limitée de la surface du corps au corps tout entier. S'il arrive qu'une telle structure symétrique montre des anomalies ou des accidents (les exceptions sont fort heureusement rares), les conséquences seront d'autant plus graves qu'elles concernent des parties situées à la périphérie du corps humain (sa forme topologique pour ainsi dire). Pour être bref, deux remarques s'imposent à la suite de cela :

(i) la propagation dont on parlait plus haut présuppose une structure continue de l’espace substrat, en d’autres termes, une homogénéité et connexité topologiques essentielles. Pour reprendre l’exemple du corps humain, on pourra dire que c’est le champ fondamental du sang ; on peut alors l’imaginer comme la donnée d’une connexion permettant une propagation continue de la substance dans l’étendue de la surface en question. Seule une obstruction de nature morphologique (ou topologique) – du genre torsion ou pli – pourrait produire une brisure de cette connexité.

(ii) Il semblerait que dans la grande majorité des cas, la forme est essentielle pour permettre l’actualisation de la matière ; d’où la formule déjà bien connue d’Aristote : *la forme est la matière en acte*. En ce sens, on peut imaginer que toute forme de privation de la matière est à reconduire à un genre d’anomalie dans la forme. Même le phénomène de la création et de l’annihilation d’énergie, bien connu mais pas encore bien expliqué, pourrait avoir un rapport avec cette idée fondamentale. Ce rapport pourrait notamment apparaître si on faisait intervenir la notion de *bifurcation* empruntée à la théorie des systèmes dynamiques (notion introduite par Poincaré, à la fin du siècle dernier). Cette notion serait d’ailleurs à rapprocher de celle de *polarité* de la masse (nulle) et de la charge (positive) dans certaines particules comme le photon, et également de celle de *genre*, un invariant topologique fondamental des surfaces et des variétés, et qui intuitivement s’exprime par le nombre de trous qu’on peut faire sur la surface.

5.2. L’importance du concept de symétrie en la physique-mathématique

Revenons au rôle des symétries. Les symétries des états physiques de la matière, comme l'état cristallin, sont d'un très grand intérêt physique et mathématique. Leur variété est tout à fait remarquable et elles peuvent être définies correctement en leur associant un certain groupe euclidien ou de Lie. Il existe des symétries dans la nature pour lesquelles on n’a pas su trouver les groupes correspondants. On peut se demander si certains états ordonnés de la matière, tels les « cristaux liquides », doivent être considérés comme des objets symétriques à proprement parler. Toutefois, rien n'empêche de les inclure dans une théorie générale des symétries naturelles. Leur théorie mathématique n'est plus celle des groupes, mais celle des pseudo-groupes créée par Élie Cartan. Quelques mathématiciens ont avancé l’idée que, parmi les pseudo-groupes primitifs découverts par Élie Cartan et Hermann Weyl, il y en a peut-être trois qui sont reliés aux états phasiques fondamentaux de la matière. Ceux qui laissent invariante une forme symplectique correspondent à l'état solide, ceux qui laissent invariant un volume à l'état liquide, et ceux qui sont des difféomorphismes arbitraires correspondent à l'état gazeux. De ce qui précède, on peut tirer deux conclusions d'ordre général :

(i) Le concept de symétrie dans la nature implique en même temps ceux de continuité et de discontinuité. Certes, les formes ou configurations symétriques sont des objets étendus qui requièrent l'existence d'un espace ambiant continu, l'étendue cartésienne. Mais ils manifestent également un ordre intrinsèque, réalisé mathématiquement par un ensemble d'opérations (un groupe discret ou continu) qui conserve cet objet. Continuité et discontinuité sont toutes deux présentes dans la théorie des groupes de Lie, où l'on a des groupes continus tels que les groupes de rotations, les groupes euclidiens, etc. Mais dans le monde physique « réel », on suppose que la réalité « ultime » (microscopique) est constituée d'éléments discontinus, particules ou atomes. Et c'est à ce niveau, à une certaine échelle de grandeur et de température, que se produit le phénomène de brisure de symétrie, par suite d'une dégénérescence de l'espace, support de ces entités subatomiques, ou d'un saut d'un groupe dans un autre groupe plus « pauvre » de l'interaction concernée.

Des théories incluant ces symétries nouvelles – appelées *supersymétries* – (introduites récemment en physique des particules élémentaires) ont été élaborées il y a maintenant une vingtaine d'années et elles ouvrent la voie à une grande unification. D'un point de vue mathématique, la supersymétrie est un nouveau type de structure géométrique. Au lieu de travailler sur une variété comme dans la géométrie différentielle ordinaire, on travaille directement sur un espace fibré analogue à l'espace fibré des spineurs où interviennent des variables non commutatives. Une telle démarche, qui s'est imposée de plus en plus dans les dernières années, a conduit à l'abandon de toute autre piste de recherche. D'un point de vue physique, le programme d'unification développé par la supergravité est fondé sur l'hypothèse que la matière est formée de composants ponctuels, les particules «élémentaires», et on s'est rendu compte que les interactions, elles aussi, pouvaient s'interpréter comme des échanges de particules « messagères » ponctuelles, les quanta du champ de jauge. Mais, plus récemment, on s'est demandé ce qui changerait si ces composants élémentaires n'étaient pas ponctuels mais avaient une certaine étendue. Les conséquences les plus intéressantes apparaissent avec des objets à une dimension, comme les cordes. On en est venu ainsi à développer une nouvelle théorie mathématique tout à fait cohérente et d'un grand intérêt pour la physique, la théorie des supercordes.

Rappelons-en l'idée essentielle. D'après cette théorie, toutes les particules élémentaires auxquelles nous avons toujours associé l'image de points infimes dépourvus de toute structure interne, semblent être en fait, non pas des points mais de (très) petites boucles qui se déplacent à travers l'espace d'un mouvement oscillatoire. Dans l'image d'une particule comme d'un point, on pensait que celui-ci se déplaçait dans l'espace en décrivant une ligne, appelée « ligne d'univers » alors que, dans cette nouvelle théorie, ce qui se produit, c'est qu'à chaque instant cette particule est vraiment une boucle infime, et on peut imaginer qu'elle devient un lasso, une corde nouée. De sorte que, au fur et à mesure du temps écoulé, cet infime lasso se déplace à travers l'espace en décrivant quelque chose qui ressemble plutôt à un tube (une espèce de cylindre), se déplaçant à son tour dans l'espace et créant pour ainsi dire son propre espace. D'après la théorie des supercordes, un tel déplacement correspond en fait à la trajectoire d'une particule. Cela a mené à penser que les constituants de la matière atomique, les atomes et les électrons en mouvement autour du noyau, les protons et les neutrons qui forment ce noyau, ainsi que les quarks, sont en fait des objets étendus dans l'espace. Ils seraient faits de morceaux de corde mais sans posséder de structure interne ; ils n'auraient donc qu'une dimension qu'on suppose être de l'ordre de grandeur de 10^{-33} centimètres. Toutes ces particules sont donc comme des cordes qui oscillent dans l'espace et qui, en plus, présentent un certain degré interne de liberté, donc une sorte de combinaison de leurs propriétés intrinsèques et de leur oscillations dans l'espace ; les premières se réduisent à leur symétries internes, représentées mathématiquement par un certain groupe qui peut être mathématiquement très compliqué. Les propriétés physiques des particules apparaissent ainsi comme autant de caractéristiques des formes spatiales que ces cordes peuvent prendre. C'est pour cette raison que, d'un point de vue mathématique, ce sont des objets topologiques parfois très compliqués. La charge électrique, par exemple, peut être vue comme un effet produit par le mouvement de la corde plutôt que comme quelque chose qui s'ajoute à la particule comme objet fondamental.

On voudrait enfin remarquer que les symétries des objets physiques, qu'ils soient solides ou pas, révèlent un phénomène fondamental de structure inhérent à leur nature même. Tout domaine (ou niveau) de la matière (vivante et non vivante) se laisse définir par une forme caractéristique ; cette forme n'est pas donnée, elle se constitue et cette constitution est un processus éminemment dynamique. Il s'agit d'une genèse. Or, le type de symétries qui interviennent pour caractériser chacune de ces formes joue un rôle fondamental dans la détermination de leur structure interne.

7. Sur le rapport intime entre géométrie différentielle et théorie de jauge

À partir des années 70, on reconnaît que, d'un point de vue mathématique, les théories de jauge sont essentiellement une branche de la géométrie différentielle, précisément celle qui fait intervenir le concept d'« espaces fibrés » munis d'une « connexion ». Cette notion joue un rôle absolument central dans la compréhension des rapports entre structures mathématiques et théories physiques et elle relie directement la géométrie à la physique, à tel point que l'on peut affirmer que les deux sont coextensives.

En effet, considérons le concept mathématique général d'un espace muni d'une connexion et la courbure de cette connexion. Supposons données une paire d'espaces M, N et une application $\phi : M \to N$; où, disons, M représente un modèle d'espace-temps et, en chaque point de M, se trouve localisé un système physique avec l'espace d'états internes $\phi^{-1}(p)$. Alors, une connexion sur un objet géométrique est une règle permettant le transport du système le long des courbes dans M. Autrement dit, si on connaît la trajectoire des lignes d'univers d'un système en M et l'état interne initial du système alors, grâce au transport parallèle conformément à la connexion, on pourra connaître les états futurs du système. D'après les théories physiques récentes, un champ gravitationnel est une connexion dans l'espace des degrés internes de liberté d'un gyroscope ; la connexion permet de suivre l'évolution du gyroscope dans l'espace-temps. Un champ électromagnétique est aussi une connexion dans l'espace des degrés internes de liberté d'un électron quantique ; la connexion permet de suivre l'évolution de l'électron dans l'espace-temps. Un champ de Yang-Mills est encore une connexion dans l'espace des degrés internes de liberté d'un quark. Or, cette image géométrique semble bien être à l'heure actuelle le schéma mathématique le plus universel permettant la description d'un univers idéalisé dans lequel on considère qu'il entre un petit nombre d'interactions de base. L'état de la matière dans l'espace-temps, en chaque point et à chaque moment, décrit une connexion sur ce fibré. La matière agit sur la connexion en imposant des restrictions à sa courbure, et la connexion agit sur la matière en la forçant à se propager par « transport parallèle » le long des lignes d'univers. Les célèbres équations d'Einstein, Maxwell-Dirac et Yang-Mills sont exactement l'expression de cette idée. Le concept géométrique de connexion est devenu ainsi un élément essentiel de la physique.

Dans ce qui précède, on n'aura pas de mal à voir la confirmation qu'à chaque entité physique correspond un concept de la géométrie et de l'analyse différentielle globales. Par exemple, l'intensité du champ s'identifie avec la courbure de la connexion ; l'intégrale d'action « n'est rien d'autre » qu'une mesure globale de la courbure. Certains invariants topologiques et algébriques appartenant à la théorie des classes caractéristiques (voir *supra*) se sont révélés très appropriés pour décrire la charge de la particule au sens de Yang-Mills. De façon plus générale, on peut faire correspondre directement les concepts de la théorie des champs de jauge à ceux de la géométrie et topologie différentielles des fibrés. Mais comment faut-il comprendre au juste la nature d'une telle correspondance ? Inspirés par une idée déjà avancée par Hermann Weyl en des termes quelque peu différents[19], nous soutenons la thèse selon laquelle au fond *le physique n'est que le géométrique en acte*. C'est dire que, non seulement la géométrie est productrice de structures idéales, d'universaux sémantiques comme la variété, le groupe, la courbure, la connexion, le fibré, mais encore, qu'elle participe des propriétés des entités physiques et des qualités des phénomènes. On pourrait en fait aller jusqu'à postuler qu'il doit y avoir en principe une structure géométrique continue ou discrète, selon la théorie et la classe des phénomènes envisagés, sous-jacente à toute phénoménologie physique donnée. Pour s'en convaincre, il suffirait de rappeler que certains grands principes de symétrie géométriques (ou certains groupes, ce qui revient au même) se convertissent en des principes dynamiques qui, eux, sont responsables de bon nombre de changements d'état affectant les phénomènes physiques. Ne faudrait-il pas alors affirmer : « à l'origine était la symétrie ou le groupe...» ? Cependant, ce concept n'est pas uniquement de l'ordre de l'abstrait et les propriétés mathématiques qu'il contribue à mettre en évidence ont à la fois une puissance explicative et une force productrice d'un monde fait de forces, d'interactions et d'énergie... L'intelligibilité mathématique de ce monde n'est pas ainsi une chose séparée de l'intelligibilité du réel lui-même.

Abordons maintenant quelques questions précises.

(i) On pourrait d'abord se demander dans quelle mesure le contenu de certaines théories physiques récentes (théories de jauge et théories quantiques des champs) est sous-déterminé par les concepts mathématiques sur lesquels ces mêmes théories reposent.

(ii) Lié à ce qui précède, il faudrait être capable d'expliquer jusqu'à quel point les différentes structures géométriques servant de support aux entités physiques épuisent leur contenu. En d'autres termes, il s'agit de savoir en quoi les entités de la Physique diffèrent des objets de la Géométrie, et comment parvenir à en classifier les critères d'individuation.

À ce propos, on pourrait déjà observer qu'une connexion, qui est un objet mathématiquement bien défini, est plus primitive que la courbure. On devrait, par conséquent, considérer le potentiel de jauge comme étant plus primitif que le champ de jauge. En fait, dans l'électromagnétisme, on peut montrer par des expériences physiques que

---

[19] *Cf.* « Reine infinitesimale Geometrie », *Mathematische Zeitschrift*, 2 (1918), pp. 384-411.

le champ peut être identiquement nul, alors que des effets physiques peuvent encore être détectés. Ceux-ci sont dus au fait que le transport parallèle doit être non trivial dans le cas où la région de l'espace n'est pas simplement connexe. Le fait que la courbure s'annule, donne l'information nécessaire sur le transport parallèle le long des chemins (géodésiques) fermés. Dans le langage de la physique, le transport parallèle est généralement décrit en termes d'un facteur de phase non intégrable. Or, la propriété de non intégrabilité se réfère localement à l'existence d'un champ non nul, tandis qu'à grande échelle cette même propriété est de nature topologique et peut survenir même dans le cas de champs nuls. Classiquement, le concept de potentiel a été introduit comme un artifice mathématique pour simplifier les équations de champ et le caractère en quelque sorte arbitraire de la jauge dans le choix du potentiel indiquait que ce dernier n'avait pas de véritable signification physique. Mais, d'un point de vue géométrique, on peut en fait montrer qu'une telle interprétation n'est pas satisfaisante. La connexion est un objet géométrique et le potentiel doit alors être considéré comme étant de nature physique. C'est le choix de la jauge grâce auquel on décrit le potentiel qui n'a pas de signification physique, ce qui correspond au fait que l'espace fibré (géométrique) qui « porte » la connexion ne possède pas de sections horizontales.

(iii) Une question plus générale concerne les rapports entre géométrie purement mathématique et géométrie physique. Selon une conception que l'on peut faire remonter à Einstein, les concepts géométriques ne peuvent pas être dissociés des concepts physiques et réciproquement, si bien que, dans la théorie de la relativité générale, le champ gravitationnel est vu comme l'effet d'une distorsion de la géométrie de l'espace-temps (plus précisément, de sa courbure) : il n'y a pas ainsi de force gravitationnelle comme telle. On pourrait cependant mentionner un autre point de vue, qui n'est pas forcément incompatible avec le précédent. Pour le géomètre et le physicien mathématicien, les événements qui se déroulent dans un espace à n dimensions (n étant arbitraire, de préférence élevé), servant d'espace mathématique substrat de ces mêmes phénomènes, ne sont rien d'autre qu'un ensemble de formes géométriques régies par des entités mathématiques abstraites. En fait, on pourrait alors penser que l'espace ne serait en aucun cas de nature immanente, mais qu'il pourrait être conçu plutôt comme une structure idéale, une sorte de principe régulateur, d'où émaneraient les quelques principes essentiels assurant le déroulement et le devenir des phénomènes.

Plus généralement et en liaison avec ce qui vient d'être dit, nous pensons qu'il s'agit d'élaborer une théorie où il devient possible d'expliquer les modes d'investissement des structures mathématiques abstraites dans les phénomènes physiques réels. En d'autres termes, il s'agit d'apporter une réponse à la question suivante : peut-on (et si oui comment) envisager qu'une suite de formes mathématiques abstraites puisse, par un ensemble de transformations de leurs éléments fondamentaux, donner lieu à certains changements dans les propriétés physiques des corps aussi bien macroscopiques que microscopiques ? Une telle étude devrait permettre de comprendre les processus qui sous-tendent la constitution des entités physiques et les critères d'individuation par rapport aux objets géométriques idéaux. Plus précisément, il s'agit de montrer qu'à des concepts mathématiques très abstraits peuvent correspondre des figures géométriques parfois très simples, qu'à des opérations productrices engendrant de l'espace (l'action des symétries) correspondent des modifications dans l'état physique des corps. On sait bien, par exemple, que les propriétés qualitatives de bon nombre de systèmes dynamiques sont sensibles à la dimension de l'espace et que, par ailleurs, la structure géométrique et topologique de l'espace peut imposer certaines contraintes à l'évolution du système.

(iv) La quatrième et dernière question peut être formulée comme suit : comment explique-t-on le fait qu'au caractère essentiellement continu des phénomènes dans le monde macroscopique (sur lequel sont fondées les théories classiques et relativistes de l'espace-temps) s'oppose la nature discontinue des phénomènes microscopiques (quantiques) ? Il ne fait guère de doute qu'il s'agiyt là de deux conceptions fort différentes sinon incompatibles. La découverte des *quanta* par M. Planck en 1900, montre de façon dramatique que les difficultés liées au développement de la physique peuvent provenir d'une aporie de nature philosophique (en l'occurrence il s'agit des apories continu-discret et déterminisme-indéterminisme). Elle montre en outre qu'une théorie physique peut être à la fois hautement prédictive d'un point de vue expérimental et tout à fait inintelligible sur le plan épistémique. On pourrait parler à ce propos, pour reprendre l'expression de John Arcibald Wheeler, de *Glory* et de *Shame* de la théorie quantique. « Glory because there is no topic in the physical sciences which it does not illuminate. Shame, because it sits there unexplained. Where is that explanation to come from ? From what other domain of thought than philosophy ? You can see why I say, "Philosophy is too important to be left to the philosophers!" »[20]

On connaît le genre de dualisme qui a été mis en évidence dans ces deux théories. D'une part, nous avons l'invariance spatio-temporelle des phénomènes relativistes (homogénéité de l'espace + symétrie du temps), où le modèle mathématique servant de fondement à la description de ces mêmes phénomènes est celui d'une variété pseudo-riemannienne compacte et lisse à 4 dimensions $M^4(g)$. Dans cette théorie, il apparaît impossible de séparer le postulat de la localisation spatio-temporelle et la loi de la gravitation de la structure géométrique de

[20] Correspondance privée.

l’espace-temps. D’autre part, c’est précisément cet axiome de la localisation spatio-temporelle qui se trouve complètement remis en question par la mécanique quantique, et notamment par le principe de complémentarité de Bohr et les relations d’incertitude de Heisenberg. Le principe de Bohr affirme l’impossibilité de connaître au même instant la position et la vitesse exactes d’un électron. Il est en plus fondé sur la représentation selon laquelle l’électron doit passer par un saut brusque d’une orbite à l’autre, et céder au rayonnement toute l’énergie libérée au cours de ce saut sous forme d’un « paquet » global, autrement dit d’un *quantum* de lumière. Ces « sauts » donneraient lieu, d’un point de vue mathématique, à des nombres discrets ou « nombres quantiques ». Mais est-ce que cela doit pour autant nous faire exclure définitivement qu’il puisse exister un niveau plus profond, encore inconnu de la théorie et de l’expérience, où les deux conceptions se réconcilieraient dans le cadre d’une nouvelle théorie mathématique commune ? La théorie de la supergravité, élaborée mathématiquement dans les années 1970 et qui représente une généralisation d’une théorie de la gravitation conçue par Weyl en 1923 et de celle proposée par Kaluza-Klein à peu près à la même époque, laisse en fait entrevoir une possibilité (pour le moment purement théorique) d’unifier les lois de la physique. À la base de cette théorie, nous l’avons vu, il y a une nouvelle symétrie – la *supersymétrie* ; celle-ci relie les deux grandes classes de particules élémentaires, à savoir les fermions (tels l’électron, le proton et le neutron) et les bosons (tel le photon) qui, comme on le sait, ont des propriétés très différentes. Puisque, dans la supergravité, la supersymétrie s’étend du niveau global au niveau local, cela conduit tout naturellement à une théorie qui englobe la force gravitationnelle et qui suggère donc la possibilité d’unifier la gravitation avec les autres forces fondamentales connues dans la nature.

8. La structure de l’espace-temps dans les théories physiques récentes

Un problème parmi les plus fondamentaux qui soient dans la physique actuelle concerne la compréhension de la structure de l’espace-temps. Les recherches récentes semblent s’orienter vers une conception de l’espace et du temps qui est très éloignée de l’expérience de tous les jours. Les principales théories physiques que l’on connaît de nos jours, telles que la théorie conforme des champs, la théorie quantique de la gravitation, la supergravité, la théorie des supercordes et la géométrie non commutative, malgré leurs différences importantes, semblent néanmoins avoir en commun une tendance à l’unification de l’espace-temps et de la dynamique, de la structure géométrique et des interactions de la théorie. La théorie de la relativité générale et la mécanique quantique ont conduit à une révision profonde de nos conceptions de l'espace et du temps, notamment de leurs structures aux niveaux macroscopique et microscopique. Elles aboutissent cependant à des conclusions opposées sur la question de la nature de l'espace. La relativité générale est fondée sur un modèle mathématique d'espace-temps qui est un *continuum* à 4 dimensions doué d'une métrique définie comme positive. La mécanique quantique, en revanche, admet que l'espace, à l'échelle des particules, est caractérisé par une structure discrète et que sa métrique fait intervenir des termes infinis.

Des tentatives pour parvenir à une théorie quantique relativiste, c'est-à-dire une théorie quantique des champs, ont été faites en vue de trouver une structure continue de l'espace-temps plus fine que celle qui est au fondement de la relativité générale, plus précisément, une structure qui englobe le caractère discret de l'espace à l'échelle quantique. Ce nouveau développement des concepts de l'espace et du temps caractérise la théorie quantique de la gravitation. On peut indiquer un certain nombre d'idées nouvelles que les théories quantiques des champs font intervenir et qui attestent de leur importance théorique :

(i) elles ont affaire à des distributions spatio-temporelles et, par conséquent, elles se rapportent à l'idée d'un *continuum* spatio-temporel.

(ii) Le programme de renormalisation dans les théories quantiques concerne la définition de la théorie relativement à de très courtes distances entre les particules, c'est-à-dire que les théories quantiques ont trait à la structure infinitésimale de l'espace-temps. Les résultats du programme de renormalisation suggèrent qu'il doit y avoir une relation intime entre la structure infinitésimale de l'espace-temps et le type d'interaction (entre les particules), qui est un concept fondamental de la théorie quantique des champs.

Il y a ainsi de bonnes raisons de croire que les théories quantiques des champs pourraient permettre l'unification des forces fondamentales :

(a) parce qu'elles font intervenir le même objet – le champ quantique – pour rendre compte à la fois des phénomènes qui, dans une certaine limite classique bien définie, se comportent comme des particules et des phénomènes qui, à l'intérieur de la même limite, ont une nature ondulatoire ;

(b) parce qu'elles remplacent l'action à distance par une interaction locale, en aidant ainsi à résoudre le vieux dualisme force/corps. Les champs interviennent ici tous avec le même droit, bien qu'ils ne jouent pas tous le même rôle. En effet, l'interaction entre le champ de matière (c'est-à-dire les électrons) est transmis par le champ de jauge (c'est-à-dire par les photons de lumière), et vice-versa. Puisque la création et l'annihilation de particules est un phénomène fondamental décrit par ces théories, le concept cinématique de particule perd son caractère primordial, au profit du rôle dominant que joue le concept dynamique d'interaction. Cela permet, entre autres, d'aborder d'une manière plus satisfaisante le problème de la *transmutation* des phénomènes et de donner une nouvelle image du vide.

(iii) Ces théories reconnaissent l'existence d'un principe constitutif fondamental – la symétrie de jauge – qui permet le développement d'un schème mathématique servant de base commune pour une théorie unifiée des quatre forces fondamentales connues jusqu'à présent : l'électromagnétisme, les forces faible et forte, la gravitation. Un des principaux objectifs du formalisme mathématique des théories quantiques des champs est d'arriver à une compréhension complète des symétries qui caractérisent chacun de ces phénomènes.

(iv) Enfin, ces théories introduisent une construction – le groupe de renormalisation (au sens de Wilson) – qui permet d'étudier le comportement des phénomènes quantiques à une échelle de plus en plus petite, et de retracer ainsi dans le temps l'émergence d'une diversité dans les phénomènes telle qu'elle se serait produite, à la suite de la transition de phase, à partir d'une unique interaction fondamentale. En liaison avec les symétries, une connexion étroite entre les principes dynamiques et le continu spatio-temporel s'est ainsi dégagée, ayant conduit à de nouvelles idées sur la structure de l'espace-temps lui-même. Ces idées semblent toutefois avoir des conséquences d'une portée encore plus grande pour les développements de la physique.

Un certain nombre d'idées nouvelles relatives à la structure de l'espace-temps, qui amènent a repenser de façon profonde la conception qu'on a pu s'en faire jusqu'à maintenant sont peut-être plus importantes encore, du fait de leur retentissement à la fois scientifique et épistémologique.

1) La structure géométrique de l'espace-temps est à l'origine du comportement dynamique, et non seulement cinématique, des phénomènes physiques qui ont lieu dans ce même espace-temps. Cela ne concerne désormais plus uniquement le champ gravitationnel, mais également l'électromagnétisme et les autres champs de matière.

2) Il apparaît de plus en plus clairement que les symétries physiques dictent les différentes interactions entre forces et entre particules.

3) L'invariance de jauge a été reconnue comme étant un principe physique universel gouvernant les interactions fondamentales entre les particules et les champs de matière. En fait, toutes les théories physiques connues de nos jours peuvent être formulées en accord avec ce principe. Il reste cependant à montrer que toutes les théories physiques peuvent être reliées entre elles grâce à un même groupe de symétries de jauge.

4) La théorie de jauge illustre un des mystères les plus profonds de la nature, mais qui est en même temps la source du plaisir que nous éprouvons à pénétrer dans ces mystères. Plus nous cherchons à comprendre la simplicité microscopique de la nature, plus il s'avère que des structures mathématiques toujours plus riches sont requises à cette fin ; de plus, ces structures se révèlent être significatives, intéressantes, et également douées d'une certaine beauté esyhétique.

5) La théorie des supercordes, développées dans les dernières années par E. Witten et ses collaborateurs, semble réussir ce que l'on croyait récemment encore impossible, à fournir un cadre théorique consistant qui n'utilise que des termes finis et qui incorpore d'une façon naturelle (non conventionnelle) la gravité quantique aux théories de jauge supersymétriques et chirales. Une des caractéristiques les plus importantes des théories des supercordes, est qu'elles permettent d'unifier les couplages de jauge. D'un point de vue conceptuel, le point fondamental du programme des supercordes consiste à proposer des idées révolutionnaires quant à la conception que l'on peut avoir de l'espace-temps. L'idée peut-être la plus remarquable est que ni l'espace ni les particules ne sont plus pensés comme formés simplement de points. En particulier l'espace, au lieu qu’être constitué de points et de figures ponctuelles, serait en fait habité par d'autres types d'objets géométriques, beaucoup plus riches et complexes, comme des noeuds, des surfaces de Riemann et d'autres « objets » topologiques. De plus, l'espace lui-même, et non seulement les entités physiques, doit être considéré comme un objet dynamique, en ce sens que ses propriétés métriques et topologiques peuvent changer par rapport à ses propriétés physiques. Plus précisément, on parvient à l'image selon laquelle les propriétés physiques de la matière seraient en quelque sorte liées aux différents modèles de noeuds et boucles qui se forment dans l'espace et dont ce dernier est à son tour constitué. Par exemple, la charge électrique peut être conçue comme une qualité du mouvement de la corde plutôt que comme quelque chose qui s'ajouterait à une particule ou à un autre objet fondamental.

8. Sur les rapports entre géométrie et physique ; quelques remarques en guise de conclusion

Afin de comprendre certaines propriétés et structures de l’espace et de l’espace-temps, il semblerait nécessaire d’approfondir quelques questions qui sont au coeur des développements mathématiques récents des théories quantiques des champs, en particulier, la géométrie non commutative, la théorie topologique des champs et la théorie des noeuds.

On a pu en effet montrer qu’il existe des liens profonds entre notamment les deux dernières méthodes, et qu’elles peuvent être englobées dans une théorie unitaire : la théorie rationnelle conforme des champs quantiques développée, entre autres, par G. Segal et N. Seiberg.

Un des faits les plus significatifs dans la dernière décennie a été sans doute la découverte par S. K. Donaldson de toute une nouvelle classe d’invariants géométrico-topologiques des variétés à 4-dimensions, liés par des relations d’homologie et de cohomologie ainsi que par la théorie de Chern-Simon-Weil de certaines classes caractéristiques, et le fait que ces mêmes invariants constituent le cadre géométrique commun pour les théories de jauge. La propriété mathématique la plus remarquable des ces invariants de Donaldson, est qu’ils sont indépendants de la métrique des variétés en question. À ce type d’invariants, il faut ajouter les invariants des variétés à 3-dimensions découverts par A. Floer, qui sont à mettre directement en rapport avec les instantons. Le groupe d’homologies de la sphère à 3-dimensions s’est révélé être un outil mathématique puissant pour comprendre certains aspects mathématiques des théories de jauge.

Dans la théorie des particules subatomiques, c’est la théorie topologique et algébrique des noeuds qui joue un rôle fondamental. Ici le problème difficile d’arriver à caractériser la nature des symétries internes de ces mêmes particules se trouve ramené au problème mathématique de la définition complète des propriétés des invariants de noeuds, et en particulier les propriétés de chiralité et d’antichiralité. Un problème décisif dont dépend la possibilité de construire une théorie mathématique cohérente des interactions fondamentales qui régissent le monde physique (macroscopique et microscopique), semble être le suivant : *pouvoir définir le groupe global de tous les mouvements caractéristiques des noeuds dans l’espace, c’est-à-dire la famille complète de ses invariants topologiques*. Ce problème demeure encore largement incompris.

Pour revenir à la théorie de Donaldson, on sait depuis quelques années qu'elle est équivalente à une théorie quantique des champs, plus précisément, à la théorie de Yang-Mills supersymétrique en dimension 2 et avec torsion. Récemment. E. Witten a proposé une nouvelle approche permettant de mieux comprendre les propriétés des invariants de Donaldson. Pour résumer, l'idée essentielle est qu'au lieu de calculer les invariants de Donaldson en énumérant les solutions des instantons du groupe de jauge SU(2), Witten obtient les mêmes invariants en caractérisant les solutions des équations duales qu'incluent les champs de jauge U(1) et les monopoles. Il a été ainsi à même d'éclairer de nouvelles propriétés des invariants de Donaldson, de donner une nouvelle description de la classe fondamentale des invariants trouvés récemment par P. Kronhoimer et T. Mrowka[21], de préciser la façon dont se comporte la théorie de Donaldson sur les variétés qui admettent une métrique à courbure scalaire positive ; il est en outre parvenu à déterminer complètement les invariants de cette théorie pour le cas des variétés kähleriennes dont le groupe d'homologie n'est pas nul. Le nouveau type d'équations géométrico-différentielles introduites par Witten et Seiberg comporte essentiellement deux concepts : une connexion U(1) et un champ de spineurs, définis sur un certain type de variété à 4-dimensions. Brièvement, il s'agit d'une variété orientée et fermée, sur laquelle on définit une structure riemannienne avec le tenseur métrique g. $\Lambda^p T^*X$, ou simplement Λ^p désigne le fibré des p-formes à valeurs réels, et $\Lambda^{2,\pm}$ est le sous-fibré de Λ^2 consistant des formes auto-duales ou anti-auto-duales.

Plus généralement, les développements mathématiques les plus intéressants des dernières décennies ont été inspirés par la tentative de trouver une explication mathématique unitaire aux quatre types de forces fondamentales existant dans la nature. À l'origine de ces tentatives, il y avait la nécessité d'arriver à expliquer le conflit entre la relativité générale et la mécanique quantique. Deux possibilités se sont présentées dès le début : (i) soit essayer d'élaborer une théorie relativiste consistante de l'univers quantique – ce qu'a fait Einstein à partir des années trente en proposant une version élargie de la théorie du transport parallèle de Levi-Civita et d'E. Cartan (ces essais n'ont cependant pas donné les résultats espérés) ; (ii) soit élaborer une géométrie différentielle (conforme) plus générale que la géométrie riemannienne capable d'englober aussi bien les forces quantiques que la gravitation. C'est cette dernière approche qui a été développée, d'abord par H. Weyl et ensuite avec les théories de jauge non abéliennes.

Nos connaissances actuelles du monde physique proviennent en grande partie du fait d'avoir géométrisé les forces. Autrement dit, du fait d'avoir montré que les principes dynamiques responsables de l'évolution des phénomènes physiques dépendent des propriétés géométriques essentielles qui caractérisent la structure de l'espace et de l'espace-temps. C'est en particulier à Riemann et à Clifford que revient d'avoir, les premiers, conçu une théorie profonde des rapports d'interdépendance entre la structure géométrique de l'espace et le comportement des phénomènes physiques. Chez Riemann, c'est surtout le tenseur de courbure – un objet géométrique de nature essentiellement locale – qui joue le rôle de raccordement entre la variété mathématique et le monde des forces physiques. Pour Clifford, c'est la courbure – conçue comme une propriété globale de l'espace – qui détermine

[21] P. Kronheimer and T. Mrowka, “Recurrence relations and asymptotics for four-manifold invariants”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 30 (1994), 215-221.

le comportement des phénomènes naturels. L'idée de Clifford est que les variations de la courbure donnent l'information nécessaire aussi bien sur les changements relatifs aux propriétés locales de la géométrie de l'espace que sur le comportement des phénomènes physiques. Chez les deux mathématiciens, on trouve également ébauchés deux autres concepts qui apparaissent à l'heure actuelle tout à fait fondamentaux pour comprendre les rapports entre la structure géométrique de l'espace et les propriétés physique de l'univers à l'échelle quantique. Riemann, lui, a introduit la notion de structure complexe holomorphe définie sur une certaine « surface de Riemann » et l'idée qu'il existe des invariants topologiques et algébriques grâce auxquels on peut caractériser la géométrie de cette même surface. Quant à Clifford, il a élaboré la notion importante d'algèbre géométrique, dont les opérations fondamentales sont non commutatives. Dirac le premier s'est servi des algèbres de Clifford pour définir des relations antisymétriques qui caractérisent certaines particules élémentaires. Pour ce qui est de la géométrie complexe d'une surface de Riemann, il semble qu’elle peut avoir un rôle important dans la compréhension de certaines propriétés essentielles des théories de jauge et des théories quantiques des champs. Deux modèles en particulier apparaissent comme extrêmement importants.

1) Le premier est celui d'une surface de Riemann connexe et orientée, un cylindre dans le cas le plus simple, muni d'une métrique conforme et d'une structure holomorphe, qui permet de définir les propriétés fondamentales des théories conformes des champs. (Des idées à ce sujet ont été développées, entre autres, par G. Segal et E. Witten).

2) Le second est celui d'une surface à 2-dimensions à bord, un tore dans le cas le plus simple, dont les concepts mathématiques sont à la base des théories topologiques des champs quantiques. (Les développements mathématiques de ces théories sont dus principalement à M. Atiyah, mais aussi à C.J. Isham et C.H. Taubes ; les développements physiques, à A.S. Schwarz et d'autres).

L'idée principale a consisté à appliquer la théorie de Morse au fonctionnel de Yang-Mills sur une surface de Riemann compacte M (ou une courbe algébrique) de genre arbitraire, et à déduire certains résultats concernant la cohomologie des espaces de module d'un fibré vectoriel algébrique stable étalé sur M.

Nous avons mentionné plus haut l'importance, pour le développement des mathématiques et de la physique, d'avoir géométrisé les forces. En réalité, cela fait partie d'un programme de géométrisation des mathématiques et de la physique d'une plus grande portée. A. Einstein, E. Cartan et H. Weyl y ont contribué de façon décisive. Ils ont montré que les principes mathématiques d'une géométrie plus générale que la géométrie riemannienne permettaient d'expliquer les phénomènes physiques comme autant de classes d'événements définis dans un certain modèle d'espace-temps.

La relativité générale a constitué la première réalisation importante de ce programme de géométrisation. Sa propriété mathématique fondamentale es d'admettre, pour les phénomènes physiques à grande échelle (cosmologiques), qu'elle explique très bien, un groupe de symétries par rapport auquel les lois de ces mêmes phénomènes se conservent localement invariantes. Il s'agit du groupe de difféomorphismes laissant invariante une forme quadratique (la métrique) d'une certaine variété pseudo-riemannienne de dimension 4.[22] Plus précisément, on peut opérer n'importe quelle transformation du système de coordonnées courbes au voisinage d'un point donné dans ce même espace-temps, sans que les lois physiques des phénomènes en soient altérées. On peut dire qu'en ce sens et seulement en ce sens, le choix des coordonnées est un fait de convention. Mais, par ailleurs, la structure géométrique de l'espace-temps, caractérisée dans le cas en question par une métrique pseudo-riemannienne hyperbolique, n'est pas du tout conventionnelle. Le fait sans doute le plus significatif de la relativité générale, est d'avoir fourni une description unifiée de l'espace, le temps et la gravitation. Selon ce modèle, l'espace-temps est une variété de dimension 4, M, avec une métrique $g_{\mu\nu}$ de signature (3, 1), dont la connexion représente la force gravitationnelle. En d'autres termes, le phénomène de gravitation est décrit par un champ de connexions symétriques ; il est donc de nature essentiellement géométrique. Einstein était en effet parti de l'hypothèse que chaque phénomène physique pouvait être associé à un tenseur T, qu'il a appelé *tenseur d'énergie*, et qui doit vérifier les deux équations

$$T^{\lambda\mu} \equiv T^{\mu\lambda}$$
$$\Delta T \equiv 0.$$

Ce la a permis d'identifier le tenseur d'énergie avec le tenseur métrique (ou de Riemann), que l'on peut définir selon un principe variationnel et qui apparaît comme la grandeur conjuguée de la connexion riemannienne (M, g). La lois fondamentale de la théorie de la relativité générale est l'équation d'Einstein :

[22] *Cf*. J.-M. Souriau, *Géométrie et Relativité*, Hermann, Paris, 1964 ; voir aussi D. Christodoulou, «Recent Progress on the Cauchy Problem in General Relativity», in *Phyisics on Manifolds*, Proceedings of the International Colloquium in honour of Y. Choquet-Bruhat, M. Flato, R. Kerner and A. Lichnerowicz eds., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994, pp. 49-58.

$$R_{\mu\nu} - 1/2 g_{\mu\nu} R = 8\pi T_{\mu\nu}$$

où $R_{\mu\nu}$ et R sont respectivement la courbure de Ricci et la courbure scalaire de $g_{\mu\nu}$, et $T_{\mu\nu}$, est le tenseur d'énergie de la matière. En absence de matière, l'équation d'Einstein pour la variété espace-temps s'écrit

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

On sait par ailleurs que les symétries n'ont pas, en relativité générale, de signification globale. On entend par symétrie globale une symétrie dans laquelle une transformation peut être appliquée uniformément à tous les points de l'espace ; dans le cas d'une symétrie locale, chaque point est transformé indépendamment de l'autre. La théorie de la relativité générale, de même que la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell, est donc ce qu'on appelle une théorie de jauge locale. En fait, du moment qu'interviennent les champs de matière, il apparaît clairement que la géométrie de l'espace-temps, caractéristique des phénomènes à large échelle étudiés par la relativité générale, se trouve conditionnée par la plus ou moins grande densité de matière dans le champ. La symétrie sur laquelle est fondée la relativité générale ne concerne pas un champ physique qui se propagerait à travers l'espace et le temps, mais la structure de l'espace lui-même. Autrement dit, la relativité générale n'inclut pas ce qu'on appelle les symétries internes, qui concernent les propriétés physiques des champs quantiques comme la phase, la charge, etc., ni ne considère les interactions entre particules.

Or, l'ensemble de l'espace-temps et de l'espace interne présente une structure mathématique plus riche : plus précisément, une structure d'espace fibré dans lequel les transformations du groupe de symétries internes, un groupe de Lie non abélien, engendrent des déplacements le long des fibrés, et les champs de jauge correspondent aux connexions de Cartan.

Cette approche géométrique s'est révélée très féconde et elle a connu des développements extrêmement intéressants ces dernières années. C'est notamment sur elle que reposent la plupart des tentatives de trouver une théorie unifiée des forces fondamentales existant dans la nature. Mathématiquement, il s'agit de construire une géométrie plus générale que la géométrie riemannienne et caractérisée par une structure beaucoup plus riche du continu spatio-temporel. On reconnaît déjà que ce dernier doit avoir un caractère essentiellement non-local, qui ne peut donc plus se définir en termes de la structure métrique infinitésimale par laquelle on détermine *a priori* la géométrie sur une variété. Le problème principal à l'heure actuelle est de savoir comment on peut caractériser précisément la structure globale de l'espace-temps dont la topologie soit suffisamment peu rigide et son groupe de difféomorphismes assez général pour pouvoir englober les différents types de symétries qui caractérisent les interactions fondamentales dans un modèle mathématique unitaire, source commune des symétries en question. Il faudrait, en d'autres termes, que toutes les symétries locales invariantes puissent être intégrées à un groupe global de symétries qui les comprenne comme autant de sous-groupes. Il en résulterait que la théorie de la gravitation et la mécanique quantique seraient peut-être compatibles, au moins d'un point de vue mathématique.

À ce propos, la théorie peut-être la plus prometteuse est la théorie des supercordes, développées notamment par M.B. Green, J.H. Schartz et G. Horowitz, et dernièrement, dans une direction tout à fait nouvelle, par E. Witten. La théorie des supercordes présente plusieurs analogies importantes avec la théorie des jauge et en particulier avec la théorie des champs de dimension 2. Elle possède également bon nombre de propriétés topologiques et géométriques intéressantes, dont certaines émergent directement de la structure de l'espace-temps. La théorie des supercordes, qui concerne les théories quantiques supersymétriques, est basée sur des objets étendus dans l'espace quantique à une dimension – les cordes –, bien que l'espace puisse être de dimension plus grande et même très élevée. Il y a cependant une théorie non supersymétrique des cordes bosoniques. En gros, il existe deux types de théories des cordes bosoniques, suivant que les objets géométriques en question sont fermés ou ouverts, c'est-à-dire un cercle S^1 ou une courbe (un segment des réels $\mathbf{R}$). Les cordes fermées possèdent une orientation intrinsèque, et c’est ce qui notamment les distingue des cordes ouvertes.

Une façon de comprendre les champs de cordes et en particulier les cordes bosoniques, fait intervenir le concept d'“espace de lacets” (*loop space*). Soit M une variété de dimension finie et soit ΩM l'espace de dimension infinie de toutes les applications de S^1 dans M, $S^1 \rightarrow M$. L'espace ΩM peut être connexe. En effet, il est facile de voir que $\pi_0(\Omega M) = \pi_1(M)$. Or, les divers éléments de ΩM correspondent aux différentes sections topologiques de la théorie des cordes. Le groupe de difféomorphismes de S^1 opère naturellement sur ΩM. L'action de groupe laisse fixe un sous-espace de dimension finie M dans ΩM, qui est difféomorphe à M. Le sous-espace M consiste simplement en les applications triviales $S^1 \rightarrow$ point. De cette manière, on peut concevoir la première variété M comme étant plongée dans ΩM. D'après ce qui précède, il semblerait raisonnable de penser que la théorie des cordes puisse être formulée en termes de champs dans ΩM.

Certains développements récents de la physique théorique suggèrent que la structure géométrique de l'espace-temps à l'échelle quantique pourrait être à l'origine non seulement du comportement cinématique, mais aussi dynamique des phénomènes physiques qu'y se déroulent. On sait que cela est vrai pour le champ gravitationnel, qui, selon la relativité générale (voir *supra*), est déterminé par la structure géométrique de l'espace-temps et notamment par sa courbure, mais il semble que désormais les autres champs de matière soient aussi susceptibles d'une interprétation géométrique. C'est là l'apport fondamental des théories de jauge. La théorie des supercordes développe la même idée sur des bases mathématiques différentes, puisqu'elle cherche à montrer que la matière se constitue à partir de la géométrie. En effet, d'après cette théorie, les champs et les particules de matière, ainsi que les forces de la nature émergent de la géométrie de la même manière que la gravité en résulte.

BIBLIOGRAPHIE

Arnowitt R. and Nath P. (Eds.), *Gauge Theories and Modern Field Theories,* MIT Press, Cambridge, Mass., 1976.

Atiyah M.F. and Bott R., "The Yang-Mills equations over Riemann surfaces", *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, A308 (1982), 523-615.

Atiyah M.F., *Geometry of Yang-Mills Fields,* Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale dei Lincei, Scuola Normale Superiore, Pisa 1979.

Atiyah M.F., Jones, J.D.S., "Topological aspects of Yang-Mills theory", *Commun. Math. Phys.*, 61 (1978), 97-118.

Atiyah M.F., "Topological Quantum Field Theories", Institut des Hautes Etudes Scientifiques, *Publications Mathématiques*, 68 (1988), 175-186.

Becker O., "Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendung", *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung*, IV, 1923.

Bennequin D. "Questions de physique galoisienne", in *Passion des formes*. Dynamique qualitative, sémiophysique et intelligibilité, à René Thom, ENS Editions Fontenay St-Cloud, 1994, 311-410.

Boi L., "L'espace : concept abstrait et/ou physique ; la géométrie entre formalisation mathématique et étude de la nature", in *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, L. Boi *et al.* (Eds.), Springer, Heidelberg-Berlin, 1992, pp. 65-90.

Boi L., *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*, Springer, Heidelberg-Berlin, 1995.

Boi L., "The space-curvature-theory of matter from Riemann and Clifford to Weyl and Wheeler", *Studies in History and Philosophy of Science*, forthcoming.

Boi L., "A trip through spacetime theory and the geometrization of theoretical physics: from B. Riemann to H. Weyl and beyond", *Preprint* Institute for Advanced Study, Princeton, april 1998.

Bourguignon J.-P., Lawson H.B., Jr., "Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields", *Commun. Math. Phys.*, 79 (1980), 189-230.

Bourguignon J.-P., Lawson H.B., Jr., "Yang-Mills Theory: Its Physical Origins and Differential Geometric Aspects", in *The Ann. Math. Studies* : *Seminar on Differential Geometry*, S.-T. Yau (ed.), Princeton Univ. Press, 1982, 395-421.

Boutot, A., "Mathématiques et ontologie : les symétries en physique. Les implications épistémologiques du théorème de Nœther et des théories de jauge", *Revue philosophique*, n° 3, 1990, 481-519.

Cartan É., "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée", *Ann. l'École Nor. Sup.*, 40 (1923), 325-412.

Cartan É., "La géométrie des groupes de transformations", *J. Math. Pures Appli.*, 6 (1927), 11-119.

Cartan É., *Œuvres complètes*, III (1), Gauthier-Villars, Paris, 1955.

Cassirer E., *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* (Berlin, 1910), Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1969.

Châtelet G., « Intuition géométrique et intuition physique », *CISM*, *Courses and Lectures*, 305, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1988, 100-114.

Chern S.S. and Simons, J., *Characteristic forms and geometrical invariants,* Ann. Math., 99 (1974), 48-69.

Chern S.S., *Selected Papers*, Vol. III, Springer-Verlag, New York, 1989.

Chern S.S., *Topics in Differential Geometry*, Institute for Advanced Study, Princeton, 1951.
Chern S.S., *Selected Papers*, Springer-Verlag, New York, 1978.
Clifford W.K., *Lectures and Essays* I, Macmillan and Co., London, 1879.
Connes A., *Noncommutative geometry*, Academic Press, New York, 1994.
Connes A., *Noncommutative geometry and reality*, J. Math. Phys., 36, 11 (1995), 6194-6231.
Connes A., Rovelli C., "Von Neumann algebra automorphisms and time-thermodynamics relation in general covariant quantum theories", Preprint, IHES/M/94/36, Bures-sur-Yvette, pp. 1-25.
De Broglie L., *Matière et Lumière*, Albin Michel, Paris, 1937.
De Broglie L., *Continu et discontinu en Physique moderne*, A. Michel, Paris, 1941.
DeWitt B., "The space-time approach to quantum field theory", in *Relativity, Groups and Topology II*, B.S. DeWitt and R. Stora (Eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, 381-738.
Dirac P.A., *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford Univ. Press, New York, 4th ed. revised, 1958.
Donaldson S., "An application of gauge theory to the topology of four manifolds", *J. Differential Geom.*, 18 (1983), 269-287.
Donaldson S.K., "Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds", *J. Differential Geom.*, 24 (1986), 275-342.
Ehlers J., *The Nature and Structure of Spacetime*, in *The Physicist's Conception of Nature*, Proceedings of a Symposium, International Center for Theoretical Physics (Trieste 1972), Edited by J. Mehra, D. Reidel, Dordrecht-Boston, 1973, 71-91.
Einstein A., "Die formale Grundlage der allgemeine Relativitätstheorie", *Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Sitzungsberichte (1914), 831-839.
Einstein A., und Grossmann, M., "Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation", *Z. Math. Phys.*, 62 (1913), 225-261.
Forgacs P. and Manton, N.S., "Space-Time Symetries in Gauge Theories", *Commun. Math. Phys.*, 72 (1980), 15.
Freed D.S., Uhlenbeck, K.K., *Instantons and Four-Manifolds*, Springer, New York 1991.
Fröhlich J., "Spontaneously broken and dynamically enhanced global and local symmetries", in *Non-Perturbative Quantum Field Theory*. Mathematical Aspects and Applications, Selected Papers of Jürg Fröhlich, World Scien. Publ., London, 1992, pp. 193-212.
Gauthier Y., "La logique interne du discours scientifique. Géométrie et physique", *Cahiers du département de philosophie*, Université de Montréal, no 95-04, 1995, pp. 1-24.
Geroch R., *General Relativity*, in Proc. Symp. Pure Mathematics, Part 2 : *Differential Geometry*, Ed. by S.S. Chern and R. Osserman, Amer. Math. Soc., Providence, 1975, 401-414.
Gromov M., "Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds"; *Invent. Math.*, 82 (1985), 307-347.
Helgason S., *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Space*, Academic Press, New York, 1978.
Husserl E., *Husserliana – Gesammelte Werke*, vol. XXI : *Studien zur Arithmetik und Geometrie* (textes de 1886-1901), herausgegeben von I. Strohmeyer, Martinus Nijhoff, The Hague, 1983.
Iliopoulos J., "Unified Theories of Elementary Particle Interactions", *Contemp. Phys.*, 21 (2), 1980, 159-183.
Isham C. J., *Quantum Gravity - An Overview*, in *Quantum Gravity 2*, Edited by C.J. Isham, R. Penrose and D.W. Sciama, Clarendon Press, Oxford, 1981, 1-61.

Isham C. J., “Topological and global aspects of quantum theory”, in *Relativity, Groups and Topology II*, B.S. DeWitt & R.Stora (Eds.), North-Holland, Amsterdam, 1984, 1059-1290.

Itzykson C., Zuber J. B., *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980.

Jackiw R., *Topological Investigations of Quantized Gauge Theories*, in *Relativity, Groups and Topology II*, *Les Houches*, Session XL, Edited by B.S. DeWitt and R. Stora, North-Holland, Amsterdam, 1984, 221-331.

Jaffe A., “Renormalization”, in *Seminar on Differential Geometry*, Ed. by S.-T. Yau, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press, 1982, 507-523.

Jammer Max., *The conceptual development of quantum mechanics*, Amer. Inst. Phys., New York, 1989.

Kerszberg P., “Of Exact and Inexact Essences in Modern Physical Science”, in *Phenomenology of Natural Science*, L. Hardy and L. Embree (eds.), Kluwer Acad. Publ., Amsterdam, 1992.

Kibble T.W.B., “Geometrization of Quantum Mechanics”, *Commun. Math. Phys.*, 65 (1979), 189-201.

Kobayashi S., Nomizu K, *Foundations of Differential Geometry*, Vols. I and II, Interscience Publishers, New York, 1963.

Kobayashi S., “Theory of connections”, *Ann. Matem. Pura Appl.*, 43 (1957), 119-194.

Lachièze-Rey M., Luminet J.-P., “Cosmic Topology”, *Physics Rep.*, 254 (1995), 135-214.

Largeault J., *Principes classiques d’interprétation de la nature*, J. Vrin, Paris, 1988.

Lie S., *Theorie der Transformationsgrupen*, 3 vols, Teubner, Leipzig, 1888-1890.

Lochak G., *La géométrisation de la physique*, Flammarion, Paris, 1994.

Lurçat F., “Space and Time : A privileged Ground for Misundertandings Between Physics and Philosophy”, in *Philosophy, Mathematics and Modern Physics*, E. Rudolph and I.-O. Stamatescu (Eds.), Springer, Heidelberg, 1994.

Malamet D., “Gravity and Spatial Geometry”, in *Logic, Methodology and Philosophy of Science VII*, Barcan Marcus *et al.*, eds., North-Holland, Amsterdam, 1986, 405-411.

Manin, Yu I., *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Sprringer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.

Manin Yu. I., *Mathematics and Physics*, Birkhäuser, Boston, 1982.

Manin Yu. I., *New Dimensions in Geometry*, «Lect. Notes in Math.», F. Hirzebruch, J. Schwermer and S. Suter (eds.), Springer, Heidelberg, 1985, 59-101.

Marzke R.F., Wheeler, J.A., “Gravitation as geometry–I: The geometry of space-time and the geometrodynamics standard meter”, in *Gravitation and Relativity*, H.-Y. Chiu and W.F. Hoffmann (eds.), W.A. Benjamin, Inc., New York, 1964, 40-64.

Maxwell J.C., *Treatise on Electricity and Magnetism*, 2 vols, Clarendon Press, Oxford, 1873.

Milnor J., and Stasheff, J., *Characteristic Classes*, Ann. Math. Studies, No. 76, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.

Milnor J., *Lectures on h-cobordism*, Princeton Univ. Press, Princeton 1965.

Minkowski H., *Raum und Zeit*, Teubner, Leipzig, 1908.

Misner C. W., Wheeler J. A., “Classical Physics as Geometry”, *Ann. Phys.*, 2 (1957), 525-603.

Nieuwenhuizen, P. van, *An Introduction to Simple Supergravity and the Kaluza-Klein Program*, in *Relativity, Groups and Topology II, Les Houches*, Ed. by B.S. DeWitt & R. Stora, North-Holland, Amsterdam, 1984, 823-932.

Penrose R., “Physical Space-Time and Nonrealizable CR-Structures”, in *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré*, Proceedings, Edited by F.E. Browder, Vol. 39 (1983), Part 1, Amer. Math. Soc., 401-422.

Penrose R., “The Twistor Programme”, *Rep. Math. Phys.*, 12 (1977), 65-76.

Petitot J., “Actuality of Transcendental Aesthetics for Modern Physics”, in *1830-1930: A Century of Geometry*, L. Boi e*t al*. (Eds.), Springer-Verlag, Heidelberg, 1992, 239-263.

Poincaré H., *Œeuvres*, Vols. 1-11, Gauthier-Villars, Paris, 1916-1956.

Richard H.C., Ralph, H.F., *Introduction to Knot Theory*, Springer, New York, 1977.

Riemann B., *Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlaß und Nachträge/Collected Papers*, nouv. éd. par R. Narasimhan, Springer/Teubner, Berlin/Leipzig, 1990.

Rovelli C., *Outline of a generally covariant quantum field theory and a quantum theory of gravity*, J. Math. Phys., 36, 11 (1995), 6529-6547.

Salam A., “Gauge unification of fundamental forces”, *Rev. Modern Phy.*, 92 (1980), 525-536.

Scheibe E., “Invariance and Covariance”, in *Scientific Philosophy Today*, Essays in Honor of Mario Bunge, Edited by J. Agassi & R.S. Cohen, Reidel, Dordrecht, 1982, 311-331.

Schwarz A.S., *Quantum Field Theory and Topology*, Springer, Berlin-Heidelberg, 1993.

Schwarz H., *Superstring Theory*, Physics. Reports, 89 (1982), 223-322.

Schwinger J., “Gauge theories of vector particles”, in *Theoretical Physics*, Lectures presented at the Seminar on Theoretical Physics (Trieste, août 1962), sous la direction d’A. Salam, International Atomic Energy Agency, Vienne 1963, 89-134.

Singer I.M., *Some Problems in the Quantization of Gauge Theories ans String Theories*, in Proceedings Hermann Weyl, 48 (1987), Amer. Math. Soc., 199-218.

Souriau, J.-M., *Géométrie et Relativité*, Hermann, Paris, 1964.

Stamatescu I.-O., *On Renormalization in Quantum Field Theory and the Structure of Space-Time*, in *Philosophy, Mathematics and Modern Physics – A Dialogue*, E. Rudolph and I.-O. Stamatescu (Eds.), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994, 67-91.

Steenrod N., *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1951.

Taubes C.H., *Moduli spaces and homotopy theory*, in Proc. Symp. Pure Math., vol. 48 : *The Mathematical Heritage of H. Weyl*, R.O. Wells, Jr. Ed., Amer. Math. Soc., Providence, 1987, 301-315.

Taubes C.H., *Self-dual Yang-Mills connections on non-self-dual* 4-*manifolds*, J. Differential Geom., 17 (1982), 139-170.

Thom R., “Quelques propriétés globales des variétés différentiables”, *Comment. Math. Helv.*, 28 (1954), pp. 17-86.

Thom R., “Les symétries brisées en physique macroscopique et la mécanique quntique”, in *Apologie du logos*, Hachette, Paris, 1990.

Torretti R., *Relativity and Geometry*, Pergamon Press, Oxford, 1983.

Trautman A., *Fiber Bundles, Gauge Fields, and Gravitation*, in *General Relativity and Gravitation*, Vol. 1, Ed. by A. Held, Plenum Press, New York 1980, 287-307.

Tsun T.S., “A Yang-Mills Structure for String Field Theory”, in *The Interface of Mathematics and Particle Physics*, Edited by D.G. Quillen, G.B. Segal, and S.T. Tsou, Clarendon Press, Oxford, 1990, 135-142.

Ward R.S., *On self-dual gauge fields*, Phys. Lett., 61A (1977), 81-82.

Weimberg S., “Conceptual foundations of the unified theory of weak and electromagnetic interactions”, *Rev. Modern Phys.*, 52 (3), 1980, 515-523.

Weyl H. and Brauer, R., “Spinors in *n* dimensions”, *Ameri. J. Math.*, 57 (1935), 425-449.

Weyl H., “Elektron und Gravitation”, *Z. Phys.*, 56 (1929), 330-352.

Weyl H., *Gesammelte Abhandlungen*, Vol. 2, Ed. by K. Chandrasekharan, Springer, Berlin-Heidelberg, 1968.

Weyl H., “Gravitation und Elektrizität”, *Sitz. Ber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, 26 (1918), 465-480.

Weyl H., *The Theory of Groups and Quantum Mechanics* (1931), new ed. Dover, New York, 1950.

Wheeler J.A., *Geometrodynamics*, Italian Phys. Soc., Vol. I, Academic Press, New York, 1962.

Witten E., "An interpretation of classical Yang-Mills theory", *Phys. Letters*, 77 B (1978), 394-398.

Witten E., "Free Fermions on an Algebraic Curve", in *Proceedings Hermann Weyl*, 48 Amer. Math. Soc., Providence, 1987, 329-344.

Witten E., "Search for a Realistic Kaluza-Klein Theory", Nuclear Phys., B186 (1981), 412.

Witten E., "Supersymmetry and Morse theory", *J. Differential Geom.*, 17 (1982), 661-692.

Witten E., "Topological Quantum Field Theory", *Commun. Math. Phys.*, 117 (1988), 353-386.

Wu T.T. and Yang C.N., "Concept of non integrable phase factors and global formulation of gauge fields", *Phys. Rev.*, D12 (1975), 3845-3857.

Yang C.N., Mills, R.L., "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance", *Phys.Rev.*, 96, 1 (1954), 191-195.

Yau S. T. (ed.), *Mathematical Aspects of String Theory*, World Scientific, 1987.