La mesure du chaos

Yvon Gauthier

0. Introduction

L'un des objets priviliégiés de la science contemporaine se nomme chaos. Si la mode s'en est emparée récemment, il y a longtemps que la philosophie et la science en ont fait un thème important, quand ce n'est pas une thèse ou un théorème original. La question du déterminisme s'y trouve circonscrite et sa solution pourrait se résumer en une formule: c'est le chaos qui est déterministe et le désordre le destin le plus probable d'un monde ordonné. Sous le paradoxe de la formule se profile pourtant une science, celle des systèmes dynamiques ou systèmes physiques à évolution temporelle et c'est cette science qui me servira de point de départ.

La théorie des systèmes dynamiques est née de la mécanique statistique de l'équilibre - la théorie du non-équilibre n'existe encore que dans les voeux pieux ou philosophiques. La mécanique statistique de Boltzmann et Gibbs est essentiellement une théorie de la mesure de la chaleur; ce phénomène qui semblait échapper à la physique classique, c'est-à-dire à la mécanique newtonienne, avait une science à lui tout seul, la thermodynamique. Le concept d'entropie, la seconde loi de la thermodynamique, avait été conçu pour mesurer la perte de chaleur, un processus irréversible. On a bien voulu, avec le concept d'entropie négative ou négentropie, remonter le cours de l'entropie dans les systèmes biologiques, mais le concept est demeuré métaphorique. Remarquons que l'irréversibilité n'est pas liée ici à une quelconque flèche du temps. La mécanique statistique qui est une science atomique ne comporte que des processus symétriques. L'entropie croît dans certains systèmes et c'est une mesure du désordre, puisqu'il y a déperdition d'énergie. On a une première mesure de l'entropie S

$$S = k \log W$$

pour W le nombre de complexions ou configurations atomiques probables du système et k la constante universelle de Boltzmann pour un gaz. Déjà la probabilité fait son entrée et on connaît le sort que la théorie de l'information de Shannon réservait à l'entropie devenue quantité de l'information

$$I = -k \log M$$

où M est le nombre de messages probables (en termes de bits). Un autre paradoxe apparent surgit ici: si l'état d'équilibre thermodynamique, l'état le plus probable, est le désordre, l'état le plus probable de l'information est le bruit.

Revenons à la thermodynamique. Le rapport de l'énergie E à l'entropie est la loi fondamentale de la thermodynamique qu'on écrit simplement

$$T = \frac{1}{k} \frac{\Delta E}{\Delta S}$$

et cette formule définit la température absolue T. La température absolue (273,15 degrés Kelvin ≈ 0,01 degrés Celsius) est un concept exact qui couvre aussi bien les gaz parfaits que les trous noirs qui sont troublants de rayonnement magnétique - parce qu'ils sont brûlants de température!

Ce qui s'est insinué dans la mécanique statistique et la théorie des systèmes dynamiques, c'est la notion de probabilité objective. Hasard est le nom qu'on donne à cette probabilité, il vient d'un mot arabe signifiant coup de dés. Quand Mallarmé écrit

Jamais un coup de dés n'abolira le hasard il sait sans doute qu'un coup de dés ne peut qu'accroître le hasard, mais il ignore peut-être que la somme de tous les coups de dés l'épuise dans sa limite: "aussi loin qu'un endroit fusionne avec au-delà" [19].

La première théorie mathématique des probabilités est fondée essentiellement sur la loi des grands nombres (ou théorème de Bernoulli) qui est en réalité une loi des moyennes ou des fréquences pour des variables aléatoires

$$y_n = (x_1 + \ldots + x_n)/n$$

La probabilité pour un événement A dans n essais ou épreuves est comparable à la proportion m/n d'occurrences n de A. on a alors

$$\lim_{n \to \infty} \Pr(|m/n - p| < \varepsilon) = 1 \qquad \varepsilon .$$

Le théorème de Tchebitcheff reprend cette notion du point de vue de la statistique: si f_i est la moyenne d'un échantillon a_i aléatoire de i items dans une population donnée, la probabilité que la moyenne de l'échantillon diverge de la moyenne de la population par plus de ε (pour tout ε) tend vers zéro quand la taille des échantillons tend vers l'infini. La notion de déviation standard est donnée par

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_1 - \bar{x})/n}$$

pour des variables aléatoires x et $\bar{x}$ la moyenne (la variance est σ^2). L'idée de moyenne est primordiale et on peut se rendre jusqu'au théorème de la limite centrale qui dit qu'une somme de variables aléatoires indépendantes $\sum_{i=1}^{n} x_i$ s'approche d'une distribution normale quand n tend vers l'infini, la distribution normale correspondant à la fonction de fréquence (ou densité) normale représentée concrètement par la courbe de Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1 .$$

C'est donc le concept de moyenne ou de fréquence qui est au coeur de la théorie des probabilités. Dans ce contexte, l'espérance est mathématique et s'exprime simplement par

$$\varepsilon(x) = \bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Encore ici on peut remplacer la limite infinie par un entier non standard a ∞ qui est "a peu près" égal à ∞ pour obtenir une version finitaire de la théorie des probabilités.

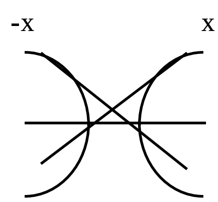
1. Théorie ergodique

Comment nommer la science du chaos, chaologie, chaotique ou quoi encore? Si l'on pense que cavo" signifiait pour les Grecs l'espace entre le ciel et la terre, on pourrait proposer chaométrie entre cosmométrie et géométrie et si l'on voulait pousser plus loin l'analogie, on pourrait qualifier la géométrie de science du circulaire, la cosmométrie de science de l'elliptique et la chaométrie de science de l'hyperbolique, entendant par hyperbolique la figure générale du désordre, par elliptique celle de la quasi-périodicité et par circulaire, la science des figures parfaites ou idéales. C'est pour avoir confondu les deux ordres du circulaire et de l'elliptique que les Grecs n'ont pu concevoir la théorie du chaos. L'ellipse apparaît bien sûr dans les sections coniques et est connue déjà chez les élèves de Platon, mais Aristote ne l'utilise pas. Pour Platon, le modèle reste celui de la sphère "armillaire" de cercles concentriques. C'est la cwvra, le lieu , l'espace qui est la matrice du monde, la nourrice du devenir (Timée, 49 a). Mais la cwvra ne peut être appréhendée directement, on l'aperçoit comme dans un rêve (Timée 52 b)[1]. Il n'est pas faux d'imaginer la chaométrie comme l'analyse de ce rêve. C'est en effet la mécanique céleste, avec la théorie de la turbulence, qui est à l'origine de la théorie contemporaine du chaos comme des théories de la quasi-périodicité des orbites et la classification périodique, quasi-périodique et apériodique (ou non périodique) caractérise assez justement la famille trinitaire circulaire, elliptique et hyperbolique que nous avons définie plus haut.

On le voit à l'évidence, le concept central est ici celui de trajectoire (= période) et les modifications qu'on a dû lui apporter expliquent en grande partie l'évolution de la théorie des systèmes dynamiques. Un système dynamique à temps continu, par exemple, est un flot (champ de vecteurs) défini par une famille de transformations différentiables f, i.e. difféomorphismes qui ont la propriété d'un groupe additif

$$f^{s+t} = f^{s} \circ f^{t}$$

où s et t sont des temps distincts. Un flot géodésique sur une variété riemannienne V représente le mouvement sans friction d'une masse ponctuelle sur l'ensemble des points du fibré tangent (ensemble des directions - vecteurs - sur ces points); ces points sont ceux d'un plan hyperbolique



disjoints du cercle unitaire (z : |z| = 1)[2]. Ainsi, pour une variété riemannienne V à courbure négative (étudiée par Hadamard) on a un flot d'Ansonov. Les trajectoires sont des orbites dans le cas des phénomènes périodiques et la mécanique céleste a pour objet, entre autres, la détermination des orbites des planètes dont Kepler a donné les premières lois. Newton, Lagrange, Laplace, Le Verrier ont été préoccupés par le problème de la stabilité du système solaire, mais c'est Poincaré qui montrera que le problème des trois corps (e.g. Soleil - Terre- Lune) n'a pas de solutions analytiques exactes (convergentes) en vertu des petits diviseurs de Le Verrier, mais le théorème de KAM (pour Kolmogorov, Arnold et Moser) trouve des solutions quasi-périodiques pour les petites perturbations des conditions initiales et sur cette lancée, Arnold a résolu le problème des trois corps et l'a généralisé au cas de n corps en 1963. Les petites perturbations suffisaient pourtant à rendre le système hyperbolique (chaotique) mais les termes temporels (ou "inégalités séculaires" d'après le terme de Laplace) ont un effet extrêmement long, de sorte qu'on ne peut craindre à court terme (quelques milliards d'années, ramenées à quelques 100 millions d'années) que la course excentrique de la Terre ne nous ramène en son foyer elliptique, le Soleil.

Ce n'est pas l'histoire du chaos que je veux faire dans les pages qui suivent, mais plutôt essayer de définir la logique interne de la chaométrie. L'histoire récente du chaos passe par la mécanique statistique (ou thermodynamique) (cf. [13]) et la théorie ergodique et, aussi bien, par la théorie (topologique) de la mesure et la théorie des probabilités. Avant de tirer des conclusions épistémologiques et de prendre la mesure de la théorie du chaos, nous reviendrons sur quelques exemples historiques pour interroger la dialectique entrecroisée de l'ordre et du désordre dans le discours scientifique sans pour autant nous attarder au débat philosophique sur le déterminisme, ou la croissance de la complexité, qui dans sa désuétude nous apparaît plutôt stérile[3].

Le théorème ergodique dit, en première approximation, que la moyenne temporelle (le long d'une trajectoire) est en général égale à la moyenne spatiale sur l'ensemble de la trajectoire; il s'agit ici d'une moyenne d'observations statistiques (sur des ensembles de points). Pour les systèmes dynamiques classique ou conservatifs, par opposé au systèmes dissipatifs, la moyenne temporelle est définie sur l'espace de phase, i.e. sur l'ensemble de tous les états possibles du système physique

$$1/T \int_0^T f(x_s)\, ds$$

où x est la position d'un point, ou micro-état, à l'instant s et cette moyenne a une limite quand on laisse le temps T tendre à l'infini T→ ω Cette moyenne vaut pour les systèmes stationnaires ou non ergodiques. Si l'on suppose que notre micro-état est décrit par coordonnées généralisées de position et de vitesse d'une masse ponctuelle dans un système mécanique (hamiltonien)[4] , l'énergie totale d'un système hamiltonien est un invariant, i.e. est une constante. Les moyennes temporelles sont un autre invariant des systèmes stationnaires. Un système ergodique est un système instable, où il y a mélange (interaction) des composantes du système; le système doit parcourir toutes les trajectoires de son espace. La généralisation du théorème ergodique va permettre d'obtenir avec Birkhoff (1931) l'ensemble des invariants

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(f^k x\right)$$

pour ϕ une fonctionnelle intégrable et f une application mesurable. Une mesure de probabilité invariante ρ est dite ergodique si elle n'a pas de décomposition triviale

$$\rho = \alpha\rho_1 + (1-\alpha)\rho_2$$

pour $\alpha \neq 0$ ou 1 et $\rho_1 \neq \rho_2$ [5].

Ce n'est pas seulement une théorie des invariants dynamiques, mais la naissance du chaos déterministe qu'on doit à la théorie de la mesure. En effet, la théorie générale des systèmes dynamiques englobe aussi bien des systèmes déterministes que des systèmes probabilistes, puisque les données (X, m, φ) d'un espace (topologique) X, d'une mesure m sur cet espace et une transformation φ qui préserve la mesure suffit pour définir un vaste ensemble de systèmes isomorphes. Le théorème ergodique implique que l'on puisse décomposer une mesure de probabilité invariante en sous-ensembles, dont certains sont négligeables (de mesure ou probabilité nulle) et la décomposition spectrale permet de passer des ensembles aux espaces fonctionnels, par exemple, l'espace de Banach. Ainsi, la décomposition spectrale de Smale[6] fournit une mesure finie - union finie de sous-ensembles disjoints - pour le flot géodésique défini plus haut; par le théorème ergodique, on montre que ce flot est ergodique[7]. De même, le théorème de récurrence de Poincaré stipule que l'état futur d'un système mécanique isolé reviendra arbitrairement près de son état initial à quelques états initiaux près (de mesure ou probabilité nulle).

Il faut noter que le théorème ergodique est en réalité une hypothèse physique et qu'il relève de l'appareil analytique. L'approche topologique représente une théorie de la mesure idéale, ce qui ne signifie pas qu'elle ne soit pas constructivisable en bonne mesure[8], comme l'est la théorie des probabilités[9]. Mais au-delà ou en deçà de cette constructivisation, l'application aux systèmes dynamiques octroie à la théorie un statut concret, dans la mesure où ce sont des théories physiques qui sont en jeu et la théorie des probabilités pour les systèmes dynamiques produit en quelque sorte une définition physique du hasard ou de l'aléatoire par le recours aux notions d'instabilité et de sensibilité aux conditions initiales, que nous allons maintenant voir.

2. Bifurcations, turbulences et attracteurs

On sait déjà que la thermodynamique classique est devenue une théorie mécanique en devenant statistique. La théorie de la mesure suggère, par exemple, que l'entropie est une mesure du contenu aléatoire dans la description d'un système; c'est aussi un invariant de la mesure. On peut noter que Kolmogorov et Chaitin en ont tiré une définition de la complexité algorithmique: une suite aléatoire est incompressible si l'algorithme de sa définition est irréductible, i.e. sa complexité est minimale ou ne peut être réduite par un autre algorithme, sa preuve par exemple. La longueur de la définition minimale est la mesure de sa complexité algorithmique ou de son contenu aléatoire. Un phénomène aléatoire est, par là, imprédictible[10]. Le concept d'entropie est donc apparu dans la théorie de la chaleur pour ensuite passer à la théorie de l'information et revenir à la théorie probabilitaire des systèmes dynamiques (ergodiques).

On peut ainsi établir une correspondance entre l'information et invariants; il n'y a pas d'information disponible en dehors du système des invariants qui couvre l'ensemble des positions et des vitesses d'un système dynamique dans son évolution temporelle (cf. von Plato [28]). C'est là la notion même de système ergodique qui doit parcourir tous les états possibles de l'espace des phases. Toute cette problématique soulève la question de la théorie de la mesure comme contrôle de l'information.

Des phénomènes comme la bifurcation et la turbulence ne semblent pas se prêter facilement à un contrôle. Comme le disent Bergé et Dubois ([7] chap. 6), c'est lorsqu'on fait varier progressivement un paramètre de contrôle qu'un système va "bifurquer" de l'état régulier (périodique ou quasi-périodique) à l'état chaotique. Il existe trois modes de bifurcation: les intermittences où un signal passe par une période régulière lente (dite aussi "laminaire") pour déraper dans une "bouffée" turbulente, le doublement du produit par une bifurcation où la période de base est multipliée par deux et l'interaction non linéaire de 2 (ou 3) oscillateurs (ou vibrateurs)[11]. Du point de vue mathématique, un système dynamique f_{μ}^{t} qui a un paramètre de bifurcation μ (une variable réelle) change qualitativement à μ_0, le point de bifurcation[12]. Avant de bifurquer, le système est structurellement stable, c'est-à-dire qu'il y a un homéomorphisme (transformation continue) entre deux points suffisamment rapprochés qui préserve l'ordre des points sur leurs trajectoires (orbites des flots). Les points de bifurcation forment un ensemble de points qui ne sont pas structurellement stables et c'est en entrant dans cet ensemble qu'un système dynamique bifurque. Pour assurer la stabilité structurelle, il faut encore des points récurrents - la récurrence dynamique de Poincaré - et des points non errants, i.e. qui ne s'écartent pas du voisinage immédiat de la trajectoire; les points fixes et les points périodiques sont donc des points non errants qui rendent possibles les mesures de probabilité invariantes.

La généricité est une autre notion d'origine mathématique utile dans la caractérisation des systèmes dynamiques; en fait, la généricité sert à restreindre la classe des systèmes dynamiques structurellement stables à un sous-ensemble résiduel R, c'est-à-dire à une intersection dénombrable d'ouverts denses E de l'espace D des systèmes dynamiques. La densité signifie ici que chaque point de D est un point de R ou un point limite de R — R est fermé dans D.

Ces restrictions sont le signe que la stabilité structurelle est un concept quelque peu instable et que la bifurcation est un phénomène général. C'est d'ailleurs à partir des bifurcations que Landau et Hopf dans les années quarante ont voulu expliquer la turbulence en supposant que la turbulence survenait par une suite de bifurcations quasi-périodiques (i.e. une cascade). Ruelle et Tackens ont repris ce programme en 1971 et ont introduit la notion d'attracteur étrange. Mais la reprise ici signifie une correction majeure, puisque l'attracteur étrange fait littéralement s'évanouir les "modes" de la théorie de Landau, sorte de modulations ou oscillations de période qui devraient se superposer pour produire l'effet de turbulence. L'attracteur étrange simplifie la situation en lui procurant un lieu ensembliste, une topologie, celle de la théorie de la mesure. Le fait qu'un attracteur étrange ait une dimension fractale, i.e. non entière, est secondaire; l'important c'est qu'il symbolise le chaos déterministe, c'est-à-dire la dépendance sensitive des conditions initiales.

Attracteurs et bassins d'attraction ont des définitions ensemblistes simples en termes d'ensembles fermés de points (fixes ou critiques) et de voisinage fondamental - un ouvert défini dans une application inverse $(f^t)^{-1}$ sur le voisinage fondamental est un bassin d'attraction. Les attracteurs étranges sont générés par des fluctuations ou des perturbations arbitrairement petites d'orbites quasi-périodiques (décrites sur des tores). La petite perturbation croît exponentiellement avec le temps et donne naissance au chaos déterministe avec sensibilité aux conditions initiales(ou encore, dépendance sensitive des conditions initiales).

Je ne m'attarderai pas à l'analyse philosophique du chaos déterministe, sur son caractère imprévisible malgré sa description déterministe et sur les ramifications de la métaphore chaotique dans les systèmes dynamiques dissipatifs. Le premier attracteur étrange, celui de Lorenz, est un modèle de la convection atmosphérique qui montrait que les météorologues ne pouvaient prédire le temps à long terme. On peut aussi traduire la postdiction contraire dans le sens d'une perte de mémoire (chez les archéologues et les historiens!). Le chaos déterministe en est venu à disputer la faveur populaire à la thermodynamique du non-équilibre, qui est encore au purgatoire des idées entre le temps et l'éternité[13], et il vaut mieux s'interroger sur les fondements épistémologiques de la chaométrie, si une telle appellation a un sens[14].

3. Probabilités et systèmes dynamiques

La théorie des processus stochastiques ou aléatoires est une théorie statistique des systèmes dynamiques et les probabilités qui s'y jouent sont empiriques; les seules propriétés a priori appartiennent au domaine subjectif des théories de la décision ou des attitudes épistémiques... ou encore à la théorie mathématique des probabilités. Une telle déclaration de principes pourrait laisser croire que les propriétés empiriques possèdent un caractère objectif inaliénable et qu'elles sont les seules à jouir d'un statut ontologique, à l'instar des propensités de Popper ou des ensembles virtuels de Gibbs. Mais la théorie fréquentiste nous a appris que les moyennes ou les valeurs moyennes de la fréquence avec leur poids relatifs sont fondées sur le calcul ou les observations répétées. La théorie statistique est une théorie des probabilités appliquée et on peut la formuler dans un cadre finitaire qui ne fait appel qu'à des espaces de probabilité finis (voir Nelson [20]). En recourant aux infinitésimaux de l'analyse non standard, on élimine les ensembles infinis de la même manière qu'on élimine les termes infinis dans une théorie physique renormalisée. La théorie des systèmes dynamiques est-elle renormalisable? Si l'on pense que la théorie des systèmes dynamiques débouche ultimement sur la théorie quantique des champs par la mécanique statistique quantique où les systèmes ont des degrés de liberté infinis et où les théorèmes de la limite abondent (limite thermodynamique et conditions à la limite), on est en droit de se demander si l'appareil analytique est réductible. Le formalisme des systèmes dynamiques est séparable en partie finie et partie infinie selon la technique employée par F. Dyson [8] pour la matrice S de dispersion. La théorie de la matrice S a pour point de départ l'amplitude

$$\langle \beta | S | \alpha \rangle \equiv (\varphi_\beta \, \psi_\alpha)$$

qui décrit la transition de phase de l'état α à l'état β d'un système de fonctions d'ondes ψ_α et ψ_β (pour les particules lourdes, à savoir les hadrons). Puisque la matrice S est finie, la séparation des parties finies et des parties infinies dans les expressions intégrales est presque automatique, comme le remarque Dyson qui ajoute que le formalisme hamiltonien est dépourvu de signification physique immédiate. Il y a donc deux descriptions possibles que Dyson définit comme celles de l'observateur idéal et celle de l'observateur réel, le premier étant capable d'une précision infinie et le second se contentant du fini. Nous appelons ce dernier observateur, l'observateur local. Cet observateur observe l'instabilité locale et par itération le phénomène global, il mesure alors le mouvement dynamique par l'espace total ou hamiltonien universel H_u en le partitionnant en sous-espaces de phases de dimension décroissante. Les invariants de mesure sont ainsi décomposables et on obtient un homomorphisme entre l'appareil analytique et le système physique. Il y a encore homomorphisme entre le système physique et la théorie des probabilités. On doit ajouter ici l'indépendance des événements qui correspond au mélange (l'observateur local est le "mélangeur"). Or l'espace topologique sous-jacent n'est pas de nature ensembliste, la logique et la théorie des probabilités qui l'articulent sont non-booléennes.

L'espace de l'hamiltonien est un espace symplectique avec produit extérieur (ou vectoriel) pour la forme différentiable extérieure

$$\omega = \sum_{i \prec j} \omega_{ij} \quad dx_i \quad dx_j$$

de degré 2. Les coordonnées généralisées de l'hamiltonien ont alors la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \quad dg_i$$

Un espace symplectique est non riemannien ou non symétrique (cf.[10]). Le produit vectoriel antisymétrique introduit une structure singulière sur le champ de vecteurs (gradient). La logique interne des structures symplectiques est celle de l'interaction et de l'interpénétration (entrelacs). Elle diffère essentiellement d'une logique des espaces (situations) symétriques finis qui, elle, pourrait bien être booléenne. C'est la logique des structures ponctuelles qui est en cause. Mais il nous faut faire un retour sur l'histoire pour étaler davantage notre motif central.

4. Aristote et la théorie du ciel parfait

L'espace du ciel chez Aristote est parfait, parce qu'il est circulaire et que le cercle est une chose parfaite (De Caelo, 269 a). Le corps du ciel, qui est un cinquième élément, est donc animé d'un mouvement circulaire éternel et les êtres qui habitent le ciel, les astres, sont des vivants immortels[15]. Cette géométrie qu'Euclide axiomatisera est bien une mesure de la terre et elle ne s'applique au ciel que par analogie et si on nomme le ciel "éther" c'est que sa course est éternelle "ajei; qei'n" (270 b). La géométrie plane traite des figures rectilignes et curvilignes, mais le cercle est une figure parfaite, c'est la première des figures; de même la sphère est-elle le premier des solides - ce qu'est le cercle parmi les surfaces, la sphère l'est parmi les solides (286 b). Au-delà du ciel, il n'y a ni vide ni lieu "tovpo"" et le ciel est nécessairement sphérique (287 a).

La physique du ciel, l'astrophysique d'Aristote, est d'abord une physique terrestre perfectionnée, anoblie, pourrait-on dire ("timiwtevra" 288 a), et la cosmologie déductiviste d'Aristote est aussi bien une théologie naturelle. Le ciel est parfait, son mouvement parfaitement régulier et éternel. Aucune des imperfections terrestres ne saurait lui être attribuée et la "via negativa" pourra décliner les noms divins de l'incorruptible ciel sans quitter le domaine de la science de la nature, selon Aristote. Laplace se fera l'écho d'Aristote quand il écrira [18], p. 478:

> Ce fut dans l'antiquité une opinion générale que le mouvement uniforme et circulaire, comme le plus parfait devait être celui des astres.

La science de la nature (" JH peri; fuvsew" ejpisthvmh") est dépassée, mais on peut en retrouver le motif par-delà Copernic chez Kepler (l'harmonie des sphères) et dans la cosmologie moderne jusqu'à Einstein.

5. Einstein et la sphère du monde

Einstein nous dit en effet que

> Du point de vue épistémologique, il est plus satisfaisant de penser que les propriétés mécaniques de l'espace sont

complètement déterminées par la matière, et ce n'est le cas que dans un univers clos.

Einstein, on le sait, privilégiait un modèle sphérique de l'univers et il a introduit la constante cosmologique λ pour en assurer le caractère statique. Einstein pensait que ce qu'il avait baptisé "le principe de Mach" l'obligeait à adopter un modèle sphérique, plus simple que le modèle infini quasi-euclidien dans lequel l'énergie moyenne de la matière devrait être nulle. Ces raisons sont d'origine purement spéculative. Le principe de Mach stipule que la masse inertielle d'un corps dépend de l'action des corps avoisinants et non de quelque système de référence absolu, l'espace absolu, que Newton avait postulé dans son expérience du seau. Or le principe de Mach ne s'intègre pas facilement à la cosmologie relativiste et si Einstein voulait qu'il soit comme inscrit dans les équations du champ[17], c'est encore une "hypothèse épistémologique" plutôt qu'une dérivation relativiste. Einstein part de l'équation du champ gravitationnel

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -kT_{\mu\nu}$$ [18]

où le terme $\lambda g_{\mu\nu}$ n'apparaît pas. Les dérivées $\mu\nu$ sont celles du tenseur métrique g, du tenseur de courbure R et du tenseur d'énergie-impulsion T; le deuxième terme de l'équation s'écrit généralement $-8\pi G T_{\mu\nu}$ pour G (ou k) la constante gravitationnelle. Einstein dérive de l'équation du champ

$$a = \frac{Mk}{4\pi^2}$$

pour a le rayon de l'univers et M sa masse totale afin de montrer "la complète dépendance des propriétés géométriques par rapport aux propriétés physiques". Mais dans cette déduction Einstein doit supposer une pression négative $g_{\mu\nu} p$ dont la valeur est $p = -\frac{\sigma}{2}$ pour σ la densité moyenne de l'univers: c'est précisément cette pression négative que représente le terme $\lambda g_{\mu\nu}$. C'est là le point de vue d'Einstein en 1921 et dans la seconde édition de son texte (1945), il reconnaîtra que le modèle de Friedmann (1922) d'un univers expansif fait l'économie "logique" de la constante cosmologique. Einstein confesse que la constante cosmologique devenait inutile après l'expansion de Hubble - la relation entre le décalage vers le rouge et la vitesse de récession des galaxies comme effet Doppler. Il dira plus tard que l'introduction du terme cosmologique aura été la plus grande erreur de sa vie.

En réalité, l'attitude d'Einstein physicien obéit à l'injonction du géomètre Riemann: diverses métriques sont possibles et il faut chercher la structure du champ dans les interactions physiques qu'il génère. C'est la physique qui doit décider, mais la physique n'est pas moins déductive que la géométrie quand elle produit une équation du champ qui n'est pas canonique, i.e. dont tous les modèles ne sont pas isomorphes. L'épistémologie "aprioriste" d'un Einstein ne doit pas nous alarmer cependant, puisqu'il faut reconnaître la priorité théorique de la physique mathématique, c'est-à-dire de l'appareil analytique sur le contenu purement physique, observationnel, de la théorie physique. Le formalisme logico-mathématique impose une structure au réel physique qui est révisable parce qu'elle n'est jamais la copie isomorphe d'un donné expérimental. Cet enseignement, on peut le retrouver aussi chez Kant.

6. Le ciel infini chez Kant

La théorie du ciel (1755) de Kant est une défense de la mécanique newtonienne et aussi une cosmologie rationnelle qui voit l'infinité et l'éternité du monde comme une suite logique de la création divine. Bien entendu, un univers infini a été imaginé avant Kant. Koyré a retracé l'histoire de l'idée dans son texte célèbre Du monde clos à l'univers infini[16], de Nicolas de Cues à

Giordano Bruno. M. Jammer a remonté bien plus loin que Koyré et même si Aristote s'oppose à l'idée d'une étendue infinie dans son De Caelo, l'infinitude de l'univers n'est pas un concept étranger à la pensée antique (Melissos de Samos) ou aux traditions juive et islamique avant l'émergence du néoplatonisme.

Le chapitre VII de [14] s'intitule "De la création dans l'étendue totale de son infinité spatiale autant que temporelle". Le système solaire n'est qu'un exemplaire de la pluralité des mondes et les étoiles fixes sont autant de copies de notre Soleil au centre d'innombrables systèmes solaires. La conception de ces univers-îles avec la théorie nébulaire des systèmes solaires (hypothèse de Kant-Laplace) est le trait marquant de la cosmologie kantienne. Lambert pourtant, dans ses Cosmologische Briefe (voir [17]), s'opposera, pour les mêmes raisons téléologiques que Kant, invoquait à l'infinitude de l'univers même s'il admet qu'il peut être éternel. Le système du monde a une extension indéfinie, parce que la structure hiérarchique de l'univers suppose un modèle sphérique, peut-être légèrement aplati (Lettre X). C'est sans doute la figure d'un anneau sphérique ou d'un ellipsoïde que Lambert dérive du disque le la Voie lactée dont il a défini la forme après Kant. Lambert s'appuie vraisemblablement sur des motifs (au deux sens du mot) d'ordre géométrique pour rejeter la thèse de l'infinité, à la manière d'Aristote, même s'il ne trouve pas d'argument probant dans ses Lettres cosmologiques. Kant n'a pas les scrupules du géomètre et sa thèse infinitaire tient davantage de la téléologie d'une puissance créatrice inexhaustible. La création est infinie, parce que son Créateur l'est. On retrouve le même argument chez Leibniz ou Spinoza pour qui la "natura naturata" doit participer à la "natura naturans". Cantor s'en souviendra quand il voudra justifier sa théorie des nombres transfinis. Kant, pour sa part, revendique pour l'univers l'infinité spatiale tout autant que temporelle, puisque l'éternité du monde est une suite infinie d'instants. Lambert, plus mathématicien que Kant, soutient que la suite s'approche de l'infini sans l'atteindre. L'architectonique céleste de Kant culmine dans l'apothéose

> ... le champ de la manifestation des propriétés divines est aussi infini que ces dernières. L'éternité ne suffirait pas à contenir les témoignages de l'Etre suprême si elle n'était pas liée à l'infinité de l'espace.[19]

Et c'est dans la poésie que s'achève cette théophanie de l'infini. Comme le chante von Haller, le plus sublime des poètes allemands selon Kant, dans son "poème inachevé sur l'éternité" (1736)

Infinité, qui pourrait te mesurer?

D'autres poètes ont chanté l'infinité du ciel, comme Lamartine dans "l'Infini dans les cieux"

> Et que l'esprit de Dieu, sous ses ailes fécondes
> De son ombre de feu couve au berceau des mondes...

Poe, dans son poème Eurêka, ira plus loin puisque la pluralité des mondes est liée à un polythéisme proche de l'astrothéologie d'Aristote

> ... je me suis porté à imaginer une succession illimité d'univers, plus ou moins semblables... chacun existe à part et indépendant, dans le sein de son Dieu propre et particulier.[20]

Kant s'en remet encore à von Haller dans sa cosmothéologie d'un monde infini et éternel:

> Quand un second néant enterrera ce monde,
> Quand du Tout lui-même ne demeurera que le Lieu...

Ici c'est Mallarmé qui semble prendre la relève dans son "Coup de dés" [19]

> Rien n'aura eu lieu que le Lieu

7. Conclusion

La perfection du cosmos chez Aristote et Kant et la simplicité du modèle fermé de l'univers chez Einstein sont des arguments déterministes dont le caractère téléologique est manifeste. La simplicité pourrait n'être qu'un ornement esthétique, mais quand elle est élevée au rang d'un principe logique ou épistémologique, elle impose des contraintes formelles à l'appareil analytique, e.g. équations différentielles partielles dans la théorie relativiste du champ non symétrique[21] qui postulent un déterminisme inhérent à un principe variationnel et aux conditions à la limite. Ce déterminisme caché est à l'oeuvre, on le sait, dans le rejet de la mécanique quantique chez Einstein et dans sa demande d'une théorie complète, isomorphe au réel physique. Kant, de son côté, suppose un centre de l'univers et loin du chaos et de la dispersion <Verstreuung>.

C'est la théorie qui est déterministe, et le réel n'est déterminé que par nos constructions qui sont autant de déterminations d'un indéterminé originaire l'<unbestimmte Unmittelbarkeit> de la terminologie hégélienne. Une théorie des probabilités peut être déterministe en son fond et on connaît assez la thèse laplacienne des probabilités a priori et leur déterminisme causal concomitant que le théorème de Bayes sur les probabilités conditionnelles ne fait que formaliser. La question est alors celle de la nature objective ou subjective des probabilités. La probabilité est-elle une mesure de l'ignorance ou une mesure de l'information? On le voit, il arrive que les deux faces de cette médaille soient confondues. Il se peut, en effet, qu'ignorance et information partielle aient une intersection nulle et que leur union redonne le savoir total où le hasard s'évanouit. Mais on ne poussera pas plus loin ces jeux du hasard et de la loi. La loi est la loi des moyennes d'une suite de variables aléatoires décrite par le théorème de Bernoulli ou loi des grands nombres

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(m/n - p) < \varepsilon = 1 \qquad \varepsilon < 0$$

pour m/n la fréquence de p, le cas le plus probable d'un événement dans un nombre n d'essais. Les statistiques de l'espérance semblent donner un air subjectif à la probabilité, mais il s'agit en réalité d'une valeur moyenne de la fréquence par le théorème de la limite centrale où des variables indépendantes s'approchent par une limite

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \sum_1^n x_1$$

d'une distribution normale; c'est une fonction de fréquence (ou densité) normale représentée par la courbe ou la cloche de Gauss ¾ Nelson donne une preuve finitaire ou élémentaire du théorème de la limite centrale dans [20], chap. 18.

Distributions, moyennes, fréquences constituent une théorie objective des probabilités et la théorie de la mesure — avec les notions de limite qui lui sont afférentes — est réductible à une théorie finitaire, comme nous l'avons vu plus haut. Leur utilisation en statistiques est donc justifiée fondationnellement, après que la pratique leur eut déjà donné un sens concret: les populations et les "tribus" finies occupent des espaces de probabilité aussi finis et l'échantillonnage aléatoire du statisticien se rapproche de l'observateur "mélangeur" capable seulement d'un nombre fini d'opérations automorphes (mixages ou mélanges) ou de choix aléatoires. La théorie des erreurs est en même temps une théorie des fluctuations soumise à la même logique probabilitaire que la théorie du chaos. Le "randomiseur" - de l'anglais <randomization> que l'on traduit par randomisation ou probabilisation - prend la relève ici du "mélangeur". Probabilités et statistiques se voient donc réconciliées dans une théorie constructiviste et de nouveau le calcul triomphe et le complexe se simplifie.

La théorie de la complexité se résume ici à la notion de la complexité d'un algorithme (de calcul). La théorie de la complexité algorithmique comporte deux temps polynomiaux, l'un déterministe (P) et l'autre non déterministe (NP). Le temps est polynomial pour un algorithme (ou programme d'une machine de Turing) s'il existe des entiers a et k tels que pour un instant (input) de longueur n, le calcul est déterminé en an^k étapes. Les algorithmes qui n'ont pas le temps polynomial ont un temps exponentiel. La programmation linéaire est la théorie mathématique de la minimisation (e.g. des coûts et des risques) et de la maximisation (e.g. des profits). La linéarité ici est réticulaire puisqu'il s'agit de construire un réseau ou treillis (sur un graphe ou polyèdre convexe) des stratégies optimales. La programmation linéaire est le pendant objectif d'une théorie de la décision dont le versant subjectif fait les choux gras des bayésiens et non bayésiens en théorie (philosophique) des probabilités. La logique inductive ou logique de la croyance (degrés de croyance) et la logique probabilitaire sont en général éloignées de la théorie mathématique des probabilités et les notions de probabilité ontologiques comme la propensité de Popper sont désuètes. La logique de la croyance et la théorie de la décision apparaissent dès lors moins comme une défense de la thèse de l'ignorance que comme la contrepartie de la théorie de la mesure de l'information et plutôt que de parler de probabilités objectives et subjectives, il vaudrait sans doute mieux définir d'abord la théorie (mathématique) des probabilités comme mesure de l'information et la théorie philosophique de la décision comme son complément. Le fait que la théorie de la mesure classique soit une théorie de l'information complète ou idéale rend compte de sa nature booléenne. Dans le même sens, la logique probabilitaire propose une théorie complète de l'information, d'où sa booléanité. Mais le calcul booléen suppose la symétrisation et même dans les cas finis, l'information incomplète et son complément ne sont pas symétrisables. La logique interne de la théorie des probabilités que nous avons rebaptisée théorie de la mesure de l'information se révèle ainsi plus proche d'une logique constructive des négations locales[27].

Je veux, pour finir, donner un exemple de la théorie des probabilités, celui d'une marche aléatoire, c'est-à-dire une marche où chaque pas peut être à gauche ou à droite d'une direction donnée (une martingale ou la méthode de Monte Carlo comportent des marches aléatoires). Appelons cette marche la démarche du philosophe titubant. Le problème suivant est bien connu, c'est celui des philosophes à table - j'introduis une variation ou note personnelle. Il y a k philosophes autour d'une table ronde et chacun a une bière à sa droite et à sa gauche (donc k bières). Pour en boire une, il doit tenir l'autre. Il s'agit de définir un protocole (un programme) P de telle sorte que si chaque philosophe lui obéit, un philosophe particulier aura éventuellement deux bières à boire. Si le protocole est déterministe, il y a des cas où tous les philosophes n'auront rien à boire. Mais si chacun, avant de prendre une bière, joue à pile ou face et qu'il prenne la bière de gauche s'il obtient pile et celle de droite s'il obtient face, on peut démontrer (avec probabilité 1) que les philosophes seront désaltérés, qu'ils auront deux bières, chacun à son tour, i.e. que la marche aléatoire de l'algorithme entraînera la démarche titubante des philosophes. La morale qu'on peut tirer de cette histoire, c'est que le hasard mène à la certitude; d'autres diraient que l'ordre naît du chaos. Je dirai simplement que la mesure en toute chose a bien meilleur goût!

Notes

1. Pour ces passages, voir [6] dont nous avons rendu compte critiquement dans Philosophiques, vol. XIX, no.1 (1992), pp. 150-155.

2. Cf. [26]

3. On consultera cependant avec intérêt l'ouvrage de Kojève [15], surprenant par l'actualité de son propos à l'époque (1932) et par l'excentricité de ses préoccupations eu égard à la trajectoire future de l'auteur. Plus près de nous, le texte d'A. Boutot [5] est une introduction générale à la question, mais on déplorera la minceur de la conclusion qui ne réussit pas à prendre la mesure des enjeux épistémologiques de la théorie du chaos en limitant le débat au positivisme (comtien). On mesurera le peu de progrès (philosophique) sur la question depuis Kojève en consultant La querelle du déterminisme , Gallimard, Paris, 1990, ou encore la minceur du propos philosophique dans Les théories de la complexité, Seuil, Paris, 1991. Parmi les ouvrages populaires, dits de vulgarisation, qui sont presque toujours "déformateurs", on consultera l'essai d'un spécialiste, David Ruelle Hasard et chaos [27]. L'auteur est un des créateurs de la théorie du chaos, mais on ne se fiera pas à ses spéculations "cahoteuses" sur la logique et les fondements des mathématiques.

4. Cf., [11] et [27] pour la formulation hamiltonienne avec des coordonnées généralisées de position $\dot{p}_i$ et de vitesse $\dot{q}_i$

$$\dot{q}_i = \frac{\delta H}{\delta p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\delta H}{\delta q_i} \quad , \quad i = 1,2,\ldots, n$$

pour des équations différentielles du premier ordre (pour l'évolution temporelle du système).

5. Cf. [26]. Remarquons que les généralisations utiles pour les mélanges et le processus élastique d'un temps de relaxation vers l'équilibre sont dues au physicien russe N.S. Krylov. Voir [7], chap. 12.

6. Voir [26].

7. Voir [7], chap. 2, le texte de J.C. Yoccoz.

8. Je pense à la théorie de la mesure de Bishop dans [3].

9. Ici, c'est à la théorie des probabilités de Nelson que je renvoie [20].

10. Cf. le texte de S. Diner, chap. 12 de [7].

11. Remarquons qu'on distingue trois types d'intermittence que nous n'analyserons pas ici.

12. Cf. [26], chap. 1. Voir aussi pour la question de la turbulence l'excellent [2]. Les phénomènes critiques ne se limitent pas à la turbulence. À part les phénomènes de convection, on peut penser, par exemple, à la percolation — filtration ou infiltration d'un liquide ou d'un fluide visqueux — à la supraconductivité, aux changements de phase dans les phénomènes quantiques.

13. Voir pour cette question [11].

14. On peut voir cette section comme une correction et une amplification des remarques de [12], pp. 25 et 124.

15. Sur cette question, voir l'analyse de R. Bodéüs [4].

16. Voir [9],

From the standpoint of epistemology it is more satisfying to have the mechanical properties of space completely determined by matter, and this is the case only in a closed universe (p.108).

Voir aussi pour cette question [11].

17. Cf. [9], p.107.

18. Cf. [9], p. 84.

19. Cf. [14], pp. 309-310:

... ist das Feld der Offenbarung gottlicher Eigenschaften eben so unendlich, als diese selber sind. Die Ewigkeit ist nicht hinfänglich, die Zeugnisse des höchsten Wesens zu fassen, wo sie nicht mit der Unendlichkeit des Raumes verbunden wird.

20. Voir [22], p. 780.

21. Voir [9], appendice II.

22. Sur la théorie des probabilités non booléennes ou pseudo-booléennes en mécanique quantique (et en logique quantique) et dans les théories

physiques en général, nous renvoyons à [12], chapitres III, IV, VI et appendice A.

Références

1. Aristote Du ciel, texte établi et traduit par Paul Moraux, Les Belles Lettres, Paris, 1965.
2. Bergé, P., Pomeau, Y. Vidal, Ch. L'ordre dans le chaos, Hermann, Paris, 1984.
3. Bishop, E., Constructive Measure Theory, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1972.
4. Bodéüs, R., Aristote et la théologie des vivants immortels, coll. "Noêsis", Bellarmin, Les Belles Lettres, Montréal-Paris, 1992.
5. Boutot, A., "La philosophie du chaos" Revue philosophique de la France et_ de l'étranger, no.2, 1991, pp.145-178.
6. Brisson, L. et Meyerstein, F.W., Inventer l'univers, Paris, Les Belles Lettres, 1991.
7. Dahan Dalmedico, A., Chabert, J.-L., et Chemlo, K. Chaos et déterminisme, Éditions du Seuil, Paris, 1992.
8. Dyson, F. J., "The S Matrix in Quantum Electrodynamics", Phys. Rev. 75 (1949).
9. Einstein, A. The Meaning of Relativity , 5e ed., Princeton University Press, Princeton, N.J. 1956.
10. Formenko, A.T. Differential Geometry and Topology, Consultants Bureau, New York and London, 1987.
11. Gauthier, Y., Théorétiques. Pour une philosophie constructiviste des sciences, Le Préambule, Longueuil, 1982.
12. Gauthier, Y., La logique interne des théories physiques, Coll. "Analytiques", Bellarmin-Vrin, Montréal-Paris, 1992.
13. Jammer, M., Concepts of Space, Harper Torchbooks, New-York, 1960.
14. Kant, E., Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels, in Kants gesammelte Schriften, G. Reimer, Berlin, 1910, pp.215-368.

15. Kojève, A., L'idée du déterminisme dans la physique classique et dans la physique contemporaine, "Le livre de poche", Librairie Générale Française, Paris, 1990.

16. Koyré, A., Du monde clos à l'univers infini, Gallimard, Paris, 1973.

17. Lambert, J.H., Cosmological Letters on the Arrangement of the World-Edifice, trad. de S.L. Jaki, Science History Publications, New-York, 1976.

18. Laplace, P.S. de, Exposition du système du monde, ed. 1835, Fayard, Paris, 1984.

19. Mallarmé, S., Oeuvres complètes, "La Pléiade", Gallimard, Paris, 1965.

20. Nelson, E. Radically Elementary Probability Theory, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1987.

21. Paty, M., Einstein philosophe , P.U.F. Coll. Philosophie d'aujourd'hui, Paris, 1993.

22. Poe, E.A., Oeuvres en prose, trad. de C. Baudelaire, "La Pléiade", Gallimard, Paris, 1951.

23. Ruelle, D. Statistical Mechanics, W.A. Benjamin Inc., Amsterdam, 1969.

24. Ruelle, D. et Takens, F., "On the Nature of Turbulence", Comm. in Math. Phys., 20 (1971), pp.167-192.

25. Ruelle, D., Thermodynamic Formalism, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1978.

26. Ruelle, D., Elements of Differentiable Dynamics and Bifurcation Theory, Academic Press Inc. New-York, 1989.

27. Ruelle, D., Hasard et chaos , Coll. "Points", Odile Jacob, Paris, 1991.

28. Von Plato, Jan, "Probability in Dynamical Systems", in J.E. Fenstad et al. eds., Logic, Methodology and Philosophy of science VIII, North-Holland, Amsterdam, 1989, pp. 427-443.