De Hilbert à Kronecker. Les fondements de la logique arithmétique

Yvon Gauthier

Le projet *De Hilbert à Kronecker. Les fondements de la logique arithmétique* est la continuation de travaux entrepris depuis quelques années sur le constructivisme arithmétique dans les fondements des mathématiques, de Fermat et Kronecker à nos jours. Comme le titre l'indique, il s'agit cette fois de remonter de Hilbert à Kronecker pour montrer comment ce que j'appelle le programme de Kronecker d'une arithmétique générale a inspiré le programme finitiste de Hilbert, tel qu'on le retrouve dans l'ouvrage *Grundlagen der Mathematik* rédigé avec la collaboration de P. Bernays.

La thèse que je veux défendre soutient qu'en dépit du petit nombre de propos philosophiques, la pratique mathématique de Kronecker a joué une influence déterminante sur l'option fondationnelle de Hilbert. Du point de vue de la théorie critique des fondements, le finitisme de Hilbert se justifie non par l'adhésion à une doctrine philosophique précise, mais bien plutôt par l'adoption d'une méthode et d'une pratique parfaitement définies. Un tel exemple est la théorie de l'élimination du symbole transfini _ chez Hilbert qui mime exactement le procédé d'élimination des indéterminées (grandeurs algébriques et transcendantes) dans l'arithmétique générale de Kronecker. D'autres exemples relèvent de la théorie des corps algébriques et de la théorie de la divisibilité ou encore de la théorie des polynômes. L'analyse technique que je veux mener sur ces sujets doit m'amener à la confirmation de la thèse que je défends: au-delà de la confession tardive de Hilbert dans laquelle il a reconnu sa filiation intellectuelle avec Kronecker et malgré le désaveu des interdits kroneckeriens (eu égard à l'arithmétique transfinie de Cantor, par exemple), la métamathématique ou la théorie hilbertienne des systèmes formels est essentiellement d'origine arithmétique. Je tirerai de cette thèse des conclusions touchant le projet contemporain d'une logique arithmétique qui soit tout autant une arithmétisation de la logique (formelle) qu'une logique (interne) de l'arithmétique qu'on pourrait appeler "logique polynomiale".

Le projet intitulé *De Hilbert à Kronecker. Les fondements de la logique arithmétique* a une double orientation: l'inversion de l'ordre chronologique signifie qu'il faut revenir à Kronecker et au "programme de Kronecker" pour mieux comprendre le programme de Hilbert et le sous-titre indique à la fois l'idée de l'arithmétisation de la logique interne des mathématiques et la reprise contemporaine d'une véritable logique arithmétique.

Que la logique interne du discours mathématique soit l'arithmétique, c'est-à-dire assujettie aux modes d'inférence propres à l'arithmétique, c'est une thèse que j'ai défendue depuis longtemps et qui a été clairement énoncée dans le premier volet de *Logique interne* (Vrin, Paris, 1991). Le troisième volet de ce tryptique − le deuxième volet sur *La logique interne des théories physiques*, Bellarmin: Vrin, Montréal: Paris, 1992 − a pour titre *La logique interne. Modèles et applications*; cet ouvrage est terminé et contient mes derniers résultats touchant la problématique des fondements des mathématiques de Kronecker à Hilbert, résultats dont l'amorce se trouvait dans deux articles "Hilbert et la logique interne des mathématiques" *Revue internationale de philosophie* vol.47, no.186 (4/1993), pp.305-318 et "Hilbert and the Internal Logic of Mathematics" *Synthese* 101 (1994), pp.1-14.

Le programme finitiste de Hilbert dans sa formulation ultime renvoie à Kronecker. Mon interprétation de l'entreprise fondationnelle des *Grundlagen der Mathematik* vise à montrer que le motif recteur de l'arithmétique générale <*allgemeine Arithmetik*> qui a dominé l'oeuvre de Kronecker est la source d'inspiration principale de la position finitiste <*finite Einstellung*> de Hilbert.

Il s'agira donc, dans la prochaine étape de la recherche − dont *La logique interne. Modèles et applications* et *Métalogique et fondements des mathématiques*, ouvrage également terminé, constituaient la première étape − d'explorer toutes les ramifications de l'arithmétique générale de Kronecker. La théorie des extensions algébriques rassemble en un faisceau cohérent un grand nombre de ces ramifications. Puisant chez Gauss, Galois, Cauchy et Dirichlet, Kronecker a réussi à unifier tout un domaine des mathématiques, qu'il a appelé justement "domaine de rationalité" <*Rationalitätsbereich*> et que Dedekind avait plutôt appelé "corps" <*Körper*>.

Après avoir bien délimité l'aire de recherche, il me reste maintenant à creuser dans deux directions bien précises à partir de mon point de départ, Kronecker: le constructivisme arithmétique qui influencera aussi bien les mathématiciens français comme Borel, Poincaré et Brouwer et le prolongement de l'arithmétique générale en algèbre abstraite chez Steinitz, Hilbert et ses élèves, en particulier, Emmy Noether. C'est la deuxième voie que je veux suivre dans la présente recherche, tout en ne négligeant pas de rappeler l'influence qu'a jouée Kronecker sur les intuitionnistes en particulier et les constructivistes en général.

Je veux me consacrer à une étude technique précise, un thème central dans le programme fondationnel de Hilbert, l'introduction et l'élimination du symbole ε; je veux montrer, par exemple, que si l'introduction du symbole ε était motivée par le désir, chez Hilbert, d'assurer le passage de l'arithmétique finitaire aux élémenets idéaux par le moyen de la logique, l'élimination du même symbole ε reprenait la méthode kroneckerienne de l'élimination des "indéterminées" <*Unbestimmte*> qui représentait l'outil principal de l'arithmétique générale. La théorie kroneckerienne des formes (polynômes homogènes) est une généralisation de la théorie des grandeurs algébriques (rationnelles ou irrationnelles) en termes d'indéterminées sur le corps des fonctions rationnelles à coefficients entiers. Une théorie générale de *l'élimination* opère la décomposition polynomiale des fonctions entières en facteurs irréductibles et la théorie des diviseurs fournit une telle décomposition pour les entiers et les formes algébriques dans les systèmes modulaires. La théorie des indéterminées s'appuie sur la théorie des équations (et de l'élimination des inconnues) de Gauss et Galois et apparaît comme une arithmétique générale qui englobe le indéterminées par association <*Associiren*>. C'est là une preuve d'existence arithmétique des grandeurs algébriques, selon l'expression de Kronecker. Le concept d'association des indéterminées premet l'extension du domaine de l'arithmétique <*Gebietserweiterung der Arithmetik*> qui conserve les déterminations conceptuelles de l'arithmétique. Or, c'est cette "extension conservatrice" qui me semble motiver Hilbert dans l'introduction du symbole ε.

Je rappelle quelques éléments du projet hilbertien. L'axiome premier du symbole ε est la formule

$$A\ (a) \rightarrow A(\varepsilon_x\ A(x))$$

où ε(A) est une fonction logique de choix transfinie qui associe un objet à chaque prédicat (ou un nombre à chaque fonction). Le quantificateur existentiel est ainsi défini par

$$x\ A\ x \equiv A\ (\varepsilon_x\ A(x))$$

et le quantificateur universel par

$$x\ A\ x \equiv (\varepsilon_x \neg A(x);$$

l'axiome aristotélicien

$$x\ A\ x \rightarrow A(a)$$

et le principe du tiers exclu

$$\neg \quad x\ A\ x \rightarrow \quad x \rightarrow A(x)$$

constituent le cadre axiomatique pour le symbole ε. Bien que la fonction de choix soit transfinie, Hilbert croyait que la finitude (de la procédure de choix) était assurée par son itération finie. C'est cette formulation minimale qui allait permettre de garantir le passage consistant de l'arithmétique à l'analyse et à la théorie des ensembles (transfinis) par le moyen de la logique − qui n'est qu'un moyen auxiliaire <*Hilfsmittel*> ou un détour <*Umweg*> à l'aide d'éléments idéaux. Mais il y a un chemin de retour, l'arithmétisation de la logique, c'est-à-dire l'arithmétisation ou la formalisation finitaire des systèmes formels: voilà tout le programme métamathématique de la théorie des démonstrations.

L'introduction du symbole ε requiert deux théorèmes sur l'élimination des "formules critiques" de la forme

$$A(t) \rightarrow A(\varepsilon_r A(r))$$

pour un terme t et un terme ε_r. Or la procédure de résolution symbolique est la reprise exacte de la décomposition polynomiale puisque les termes ε sont ordonnés selon leur degré et leur rang, comme dans le cas des polynômes et l'on obtient la réduction à une forme disjonctive de termes sans symbole ε comme polynôme linéaire par la substitution d'un terme t au terme ε_r. Le second théorème ε applique la même méthode aux formules existentielles et à l'axiome d'égalité pour les formules ε. C'est le schéma d'induction qui crée des difficultés supplémentaires et exige une nouvelle formule critique

$$A(t) \rightarrow \varepsilon_r A(r) \neq t$$

La substitution va s'effectuer ici à l'aide de chiffres (ou noms de nombres) pour les termes ε; une forme du principe de descente infinie va servir de substitut à l'induction complète:

> Pour tout prédicat numérique P qui correspond à un nombre au moins, il existe un tel nombre auquel correspond le prédicat qui ne correspond pas au prédécesseur (différent de 0) de ce nombre.

Il s'agit en réalité d'une conséquence du principe du plus petit nombre avec la fonction récursive μ

$$A(a) \rightarrow (\mu_x A(x))$$

mais la procédure générale équivaut à la décomposition polynomiale en facteurs irréductibles, c'est-à-dire à l'alghorithme euclidien du plus grand diviseur commun généralisé par la descente infinie pour les polynômes de degré n. Les substitutions globales (ou partielles) et les substitutions effectives aboutissent à trouver la résolvante ou le polynôme de solution. Toute cette démarche mime exactement la théorie générale de l'élimination telle qu'on la trouve chez Kronecker. La preuve de consistance conduira seulement à trouver les formules réduites irréductibles. Pour les théories logiques ouvertes (sans quantificateurs), le théorème de Hilbert-Ackermann suffit. Mais pour l'arithmétique, il a fallu la preuve de Gentzen ou celle de Gödel ou encore celle d'Ackermann qui utilise la méthode d'élimination du symbole ε (pour obtenir la preuve de consistance, qui n'est finitaire que dans un sens élargi, puisqu'il faut se rendre jusque dans la deuxième classe de nombres de Cantor, jusqu'à ε_o, pour démontrer la consistance de l'arithmétique (de Peano). La position finitiste est certainement l'héritière du constructivisme arithmétique (l'arithmétique générale) de Kronecker, mais l'introduction du symbole ε et de la logique formelle qu'on élimine ensuite pour revenir à la logique interne de l'arithmétique signifie à la fin que l'arithmétique finie est auto-consistante *par construction* en vertu de la finitude du procédé de décomposition polynomiale et de la méthode de descente finie. La logique formelle chez Hilbert n'a qu'un rôle ancillaire, elle ne fait qu'assurer le passage de l'arithmétique à ses extensions algébriques par le détour des éléments idéaux. Mais ces éléments idéaux sont de nature algébrique et Kronecker n'a pas eu besoin de la logique formelle pour en faire la démonstration. Quant à la logique formelle, elle ne peut légitimer l'extension transcendante au paradis "gris" des ordinaux transfinis au-delà de ε_o, puisque la preuve de consistance s'arrête là. Dans ce sens, l'association d'une arithmétique transfinie à l'arithmétique finie ne peut entraîner qu'une élimination pure et simple des indéterminées transfinies, c'est-à-dire à une expulsion hors du champ de l'arithmétique générale. Hilbert admet que Kronecker a réussi à formuler une théorie finitaire des nombres algébriques, i.e. du corps des nombres algébriques. C'est la clôture algébrique de la théorie des indéterminées qui limite en amont le programme de Hilbert comme les résultats d'incomplétude le limitent en aval. Rappelons que Steinitz dans son travail *Algebraische Theorie des Körper* (1910) veut compléter la théorie kroneckerienne des domaines de rationalité en y intégrant les extensions transcendantes infinies (avec un nombre infini d'indéterminées appelées aussi "transcendantes"), mais il doit recourir à des concepts ensemblistes de bon ordre (axiome du choix et induction transfinie sur les ordinaux). Ce prolongement n'est plus l'arithmétique générale au sens de Kronecker qui avait mis en garde contre les procédures infinitaires en insistant sur le fait que les séries de puissances infinies ont un mode de constructionn arithmétique (de leurs coefficients) et que les expressions polynomiales finies rendent inutile le passage au-delà du concept de série finie. C'est tout le sens de la théorie générale des congruences dans les systèmes modulaires − la théorie des diviseurs − qui est en réalité une théorie des extensions algébriques "réductrice" par l'isomorphisme entre les extensions avec nombre fini d'indéterminées et les polynômes dans le corps des nombres algébriques. C'est là la leçon que semble avoir retenu Hilbert dans son programme finitiste ultime, celui des *Grundlagen der Mathematik*.

Voilà le noyau de la thèse que je souhaite étayer dans les prochaines années. Cette recherche aboutira certainement à un ouvrage dont le titre pourrait être identique à celui du présent projet de recherche *De Hilbert à Kronecker. Les fondements de la logique arithmétique* et dont je veux aussi rédiger une version en langue anglaise. Je compte bien réaliser ce projet dans les trois années que couvrira la subvention.

BIBLIOGRAPHIE

1. Edwards, H.M. "Kronecker's Arithmetical Theory of Algebraic Quantities" *Jber. o. Dt. Math.-Verein* 94 (1992), pp.130-139.

2. Gauthier, Y. "Hilbert et la logique interne des mathématiques" *Revue internationale de philosophie*, vol.47, no 186 (4/1993), pp.305-318.

3. Gauthier, Y. "Hilbert and the Internal Logic of Mathematics" *Synthese* 101, (1994), 1-14.

4. Hilbert, D. "Ueber das Unendliche" *Math. Ann.* B. 95 (1926) pp.161-190.

5. Hilbert, D. et Bernays, P. *Grundlagen des Mathematik* I et II, 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1968 et 1970.

6. Hilbert, D. *Gesammelte Abhandlungen*, 3 Bände, Chelsea, New York, 1932, 1933, 1935.

7. Kreisel, G. "Hilbert's Programme" *Dialectica* 12 (1958), pp.346-372. Révisé avec un «Postscript» dans *Philosophy of Mathematics*, éd. par P. Benacerraf and H. Putnam, 2nd ed. Englewood Cliffs, N.J., (Prentice-Hall:1983).

8. Kreisel, G. "What have we learnt from Hilbert's second problem?" dans *Mathematical Developments arising from Hilbert's problems*, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 93-130.

9. Kronecker, G. *Werke*, éd. par K. Hensel, 5 vol., Chelsea, New York, 1968.

10. Kronecker, G. *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Band I, hrsg. v.K. Hensel, Teubner, Leipzig, 1901.

11. Steinitz, E. *Algebraische Theorie der Körper*, Chelsea, New York, 1950.